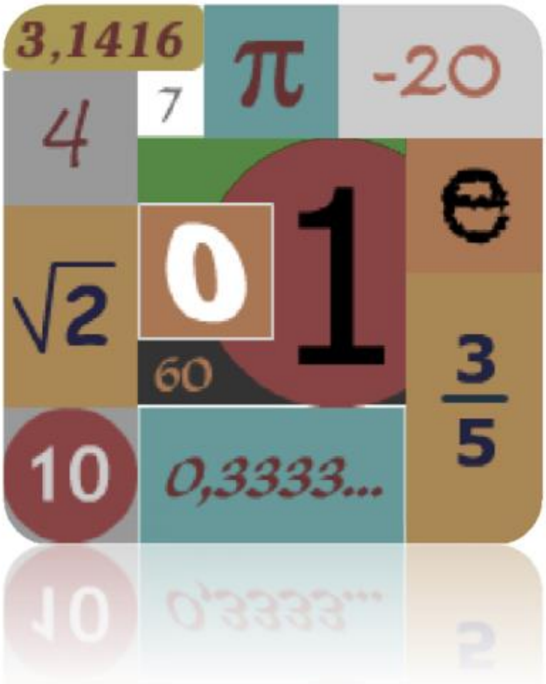
Profesorado para la Educación Secundaria en Matemática

Elementos de la Aritmética y el Álgebra

GUÍA 1: Conjuntos Numéricos



Profesores: Olga Peñaloza y Víctor Palazzesi

Alumno:

Año 2019

EL LENGUAJE DE LA MATEMÁTICA

El hombre utiliza palabras, sonidos, símbolos, imágenes y gestos, entre otros, para dar a conocer sus ideas. Por su parte, la matemática ayuda a entender el mundo y sus relaciones, pero expresándolo en un **lenguaje simbólico complejo**.

Para aprender Matemática hace falta conocer su *idioma*, sus palabras clave, los objetos que se utilizan, las herramientas necesarias para manejar esos objetos. Sin embargo, se necesita cierto entrenamiento para traducir del lenguaje que se utiliza habitualmente al sistema de escritura matemática.

El idioma que utiliza es formal y abstracto, pues mezcla palabras, números, símbolos, figuras y conceptos que tienen un "significado matemático", que no siempre coincide con el significado en el lenguaje normal, castellano o de cualquier otro idioma.

A su vez, la Matemática es una ciencia lógica y deductiva. La deducción lógica exige cumplir unas "reglas" muy precisas: "si no se cumple, no funciona". Parte de principios (axiomas); de unas definiciones y conceptos; de unos objetos (números, símbolos, operadores,…); de unas "reglas de juego" (propiedades). Las "reglas de juego" hay que aprenderlas, comprenderlas y utilizarlas. Los resultados a los que se lleguen deben ser demostrados; no basta con una simple comprobación.

El lenguaje matemático comprende: el lenguaje coloquial, el algebraico o simbólico y el gráfico.

El **lenguaje coloquial**, formado por las palabras que se utilizan para conversar. Por ejemplo: "el triple de un número es igual a diez", "Juan tiene dos años más que Patricia", "el costo de vida ha aumentado un 2%".

El **lenguaje simbólico o algebraico**, formado por los símbolos específicos de la Matemática. Las expresiones de los ejemplos presentados en el párrafo anterior serían respectivamente: "$3n=10$", "$J=P+2$" y "$C=c+0{,}02c$".

El **lenguaje gráfico**, utilizado para brindar mucha información en poco espacio. Por ejemplo: los gráficos circulares, los gráficos de barras o las representaciones en el plano cartesiano.

De esta manera, la Matemática constituye un lenguaje exacto, que requiere palabras sencillas, aunque bien definidas, y la estricta observación de sus "reglas". Una frase en Matemática debe transmitir un mensaje exacto a quien lo lea. Frases cuyo significado no es claro y aquellas que admiten más de una interpretación no pueden ser toleradas en este lenguaje. El escritor de una frase matemática tiene que saber lo que quiere decir y estar seguro de que la frase expresa el mensaje que desea transmitir. Así mismo, un buen lector de frases matemáticas, un traductor de dicho lenguaje, será capaz de comprenderla y poder utilizarla para satisfacer las necesidades que requiera.

¿Qué estudia la Matemática?

La Matemática estudia la cantidad (números; álgebra), la extensión (la figura, la forma, los ángulos; la geometría); el cambio, la variación de magnitudes (el límite; análisis matemático); grandes conjuntos de datos (estadística); el azar y su medida (probabilidad). Es decir, que la Matemática es una ciencia formal que, partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones entre entidades abstractas como números, figuras geométricas o símbolos matemáticos. Debe destacarse además su método (lógico, deductivo, constructivo, seguro y universal), que hace que pueda aplicarse en prácticamente todas las otras ciencias: como herramienta de cálculo y de visualización, como sistema de organización del conocimiento teórico (proporcionando modelos matemáticos), como garantía de "certeza", entre otras utilidades.

Por este motivo, en este Seminario de Alfabetización Académica (SAA) abordaremos la lectura y escritura en Matemática, entendiendo que esta ciencia utiliza diferentes lenguajes. Para ello se tomará como eje el estudio de los diferentes conjuntos numéricos.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Aún en las etapas más primitivas de la evolución humana se ha desarrollado en el hombre el sentido del número y la capacidad de contar. Esta habilidad le ha permitido reconocer lo que ha cambiado en un conjunto de elementos, por ejemplo, si se ha extraído o añadido algún objeto.

¿Cómo pudo un hombre, hace 5000 años, saber que en su rebaño no faltaba ninguna de sus 41 ovejas, si ni siquiera sabía contar hasta 10? Una simple solución es la siguiente: llevaba consigo tantas piedritas como ovejas, y al terminar la jornada guardaba por cada oveja una piedrita en su bolsa; si sobraba alguna sabía que debía buscar una oveja. Establecía una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de objetos.

Mucho tiempo después, los romanos usaron también piedritas para hacer sus cálculos; la palabra "cálculo" significa etimológicamente piedra, y de ahí el origen de la palabra calcular. La actividad de contar y la necesidad de simplificar la tarea de hacer cálculos, implicó la necesidad de utilizar símbolos escritos para representar lo que se había contado. Fue así que surgieron los distintos *sistemas de numeración*. A través de la historia se han usado los distintos sistemas, y en cada uno de ellos cada número se representa como una combinación de símbolos. En algunos casos los símbolos representan cantidades y una combinación de símbolos representa la suma de estas cantidades; estos sistemas emplean una descomposición *aditiva*.

En otros casos, como el sistema decimal actual, importa la ubicación del símbolo en la representación del número. Por ejemplo, 21 significa veintiuno, mientras que 12 significa doce. Estos sistemas se llaman *posicionales*. Algunas culturas usaron una base de 20 símbolos, otros de 60, pero el sistema de numeración que ha predominado y es el que actualmente se usa tiene base 10, y por eso se llama *decimal*. Eso significa que pueden escribirse números arbitrariamente grandes con tan solo diez símbolos: 0, 1, 2, … , 9. Así como el número 10 ha dejado sus marcas en nuestra forma de contar y en las palabras para nombrar los números. Así por ejemplo, "dieciséis" está compuesto por las palabras "diez" y "seis", "treinta" hace alusión a "tres" veces diez.

Los números que se usan para contar se llaman naturales o enteros positivos: 1, 2, 3, … Fueron los primeros números que aparecieron en la historia de la Matemática. Más adelante surgió la necesidad de agregar el 0 como una forma de representar lo que *no* hay, los números negativos para poder resolver todas las sustracciones, las fracciones para resolver los cocientes, también los números irracionales y los imaginarios. De esta manera, quedaron definidos los distintos conjuntos numéricos: los naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos.

A continuación se realizará un recorrido por los distintos conjuntos numéricos, justificando brevemente la necesidad de construir cada uno de ellos.

Aclaración: en esta guía de estudio se presenta la necesidad que conllevó a la creación de cada conjunto numérico antes de su construcción formal. El objetivo es que conozca los distintos conjuntos numéricos así como las operaciones y sus propiedades que se definen en cada uno de ellos. Conforme avance en su carrera estudiará la construcción formal de cada uno de ellos.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Los números que se utilizan para contar se llaman *números naturales*. Al conjunto formado por todos los números naturales se lo denota con la letra $\mathbb{N}$. Para contar *un* elemento se utiliza el número 1, para el siguiente el número 2, y así sucesivamente.

A cada número natural le sigue otro número natural que se obtiene agregando 1 al anterior. Así aparece la operación *adición*. Sumar 1 es nombrar al siguiente de un número natural. Por ejemplo, el siguiente de 5 es 6, y por eso $6=5+1$.

Los elementos que se *adicionan* reciben el nombre de *sumandos* o *términos,* y el resultado de la operación recibe el nombre de *suma*.

En símbolos:

$$\forall a,b \in \mathbb{N} : \exists c \in \mathbb{N} \,/\, a+b=c \quad (1)$$

La operación de *adición* se extiende a todos los números naturales. Así, por ejemplo, como $2=1+1$, entonces $5+2$ es "el siguiente, del siguiente de 5", es decir $5+2=7$.

Se dice que un número natural a es menor que otro b, si y sólo si existe un número natural c tal que la suma entre a y c es b. En símbolos:

$$\forall a,b,c \in \mathbb{N}: \quad a<b \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{N} \,/\, b=a+c$$

Por otra parte, un número natural es mayor que otro, si y sólo si el segundo es menor que el primero. En símbolos:

$$\forall a,b \in \mathbb{N}: \quad a>b \quad \Leftrightarrow \quad b<a$$

La suma reiterada de un mismo número se llama *multiplicación*. Así, sumar 5 veces 8 es multiplicar 5 por 8, y coincidentemente, es lo mismo que sumar 8 veces 5. Esto es:

$8+8+8+8+8=5.8$ y además

$$\underbrace{8+8+8+8+8}_{5 \text{ veces}}=\underbrace{5+5+5+5+5+5+5+5}_{8 \text{ veces}}.$$

Los elementos que se *multiplican* reciben el nombre de *factores* y el resultado de la *multiplicación* se llama *producto*.

Así, en el conjunto de los números naturales pueden definirse 2 operaciones: adición y multiplicación.

Estas operaciones son *cerradas* en $\mathbb{N}$, es decir la adición y la multiplicación de dos números naturales es otro natural.

$$\forall a,b \in \mathbb{N} : a+b \in \mathbb{N} \qquad \forall a,b \in \mathbb{N} : a \cdot b \in \mathbb{N}$$

Propiedades de la adición y multiplicación en $\mathbb{N}$.

Las operaciones de adición y multiplicación cumplen con las siguientes propiedades en el conjunto de los números naturales:

Conmutatividad: esta propiedad se refiere a que el orden de los sumandos de una adición o de los factores en una multiplicación no altera el resultado. Por ejemplo,

$$5+6=11 \text{ y } 6+5=11, \qquad 2.3=6 \text{ y } 3.2=6.$$

Es decir que:

$$5+6=6+5 \qquad \text{y} \qquad 2.3=3.2.$$

Asociatividad: esta propiedad se refiere a que la forma de agrupar los términos en una adición o en una multiplicación no altera el resultado. Por ejemplo,

$$2+(3+4)=2+7=9 \qquad \text{y} \qquad (2+3)+4=5+4=9;$$

$$2.(3.4)=2.12=24 \qquad \text{y} \qquad (2.3).4=6.4=24.$$

Es decir que

$$2+(3+4)=(2+3)+4 \qquad \text{y} \qquad 2.(3.4)=(2.3).4$$

Propiedad uniforme: si se suma o se multiplica en ambos miembros de una igualdad, un número natural, la igualdad se mantiene.

Propiedad cancelativa: es la recíproca de la propiedad uniforme.

Elemento neutro para la multiplicación: el producto entre cualquier número natural y el 1 es igual a dicho número natural.

Distributividad de la multiplicación respecto a la adición: la multiplicación es distributiva respecto de la adición. Por ejemplo:

$$(2+1).3=2.3+1.3 \qquad \text{y} \qquad 3.(2+1)=3.2+3.1.$$

Actividad

a) Escriba en lenguaje simbólico cada una de las propiedades enunciadas anteriormente en lenguaje coloquial.
b) ¿Por qué la adición no tiene elemento neutro en $\mathbb{N}$? ¿Conoce algún número que no sea natural que cumpla con la definición de elemento neutro?

Así como la multiplicación por un natural es una suma reiterada de términos iguales, se conviene en representar la multiplicación iterada como una *potencia*:

$$8.8.8.8 = 8^4 .$$

En este caso, 8 se llama la *base* y 4 el *exponente*. La operación recibe el nombre de *potenciación* y el resultado se llama *potencia*. El exponente indica el número de veces que se multiplica a la base por sí misma. Se puede observar por ejemplo que:

$$5^2.5^4 = 5^{2+4} = 5^6 , \quad \text{puesto que}$$

$$\underbrace{(5.5)}_{\text{2 veces}}.\underbrace{(5.5.5.5)}_{\text{4 veces}} = \underbrace{5.5.5.5.5.5}_{\text{6 veces}}$$

Actividad

a) ¿Qué propiedades cumple esta operación en el conjunto de los números naturales? Enúncielas coloquial y simbólicamente.
b) ¿Qué propiedades de la adición y la multiplicación <u>no</u> se cumplen en la potenciación en el conjunto de los números naturales? Exhiba un ejemplo que justifique por qué no es válida dicha propiedad.
Los ejemplos propuestos en la actividad c) se conocen como *contraejemplos*.

Propiedades del $\mathbb{N}$

Con lo expuesto anteriormente pueden resumirse las siguientes propiedades del $\mathbb{N}$:

1) Es un conjunto "<u>infinito</u>", y totalmente ordenado por la relación "$\leq$".
2) Todo número natural tiene siguiente.
3) Este conjunto tiene <u>primer elemento</u>, el **1**.
4) No tiene <u>último elemento</u> (como consecuencia de 2)).
5) Entre dos números naturales existe un número finito de números naturales. Por ello se dice que es <u>**discreto**</u>.

Posteriormente surgió la necesidad de definir un número que represente que no hay elementos que contar y es así que surge el número 0.

Al conjunto formado por todos los números naturales y este nuevo número se lo simbolizó con $\mathbb{N}_0$ (se lee: $\mathbb{N}$ sub cero):

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Este conjunto tiene las mismas propiedades que el conjunto de los números naturales a excepción del primer elemento, que en este conjunto es el 0.

Se definen las mismas operaciones que se definieron en $\mathbb{N}$ y se agregan las siguientes propiedades:

Elemento neutro para la adición:

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{N}_0 : \exists 0 \in \mathbb{N} / a + 0 &= 0 + a \\ &= a\end{aligned}$$

Elemento absorbente para la multiplicación:

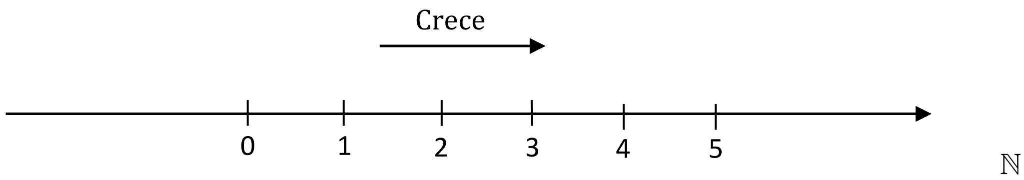
$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{N}_0 : \exists 0 \in \mathbb{N} / a \cdot 0 &= 0 \cdot a \\ &= 0\end{aligned}$$

Potencia con exponente 0: se conviene definir la potencia de un número natural con exponente 0, igual a 1. Por ejemplo, $7^0 = 1$ y $(-5)^0 = 1$.

En símbolos: $\forall a \in \mathbb{N} : a^0 = 1$

Recta Numérica

Fijada una recta, un punto **o** como origen, un segmento como unidad y un sentido a partir del punto origen (de izquierda a derecha), a todo número natural le corresponde un punto sobre la recta, pero existen puntos de la recta a los que no les corresponden números naturales. Por ello, se dice que el conjunto $\mathbb{N}_0$ **"no cubre"** la recta.



A la hora de plantear expresiones que dan solución a un problema surge el interrogante de qué operación se resuelve primero y cómo indicar la prioridad de una operación sobre otra.

Resuelva la siguiente situación:

Actividad

El "LOTER DOBLE" y el "LOTER 3" son juegos de azar cuyos premios tienen en cuenta las tres últimas cifras del número sorteado por la Lotería Nacional. En el primero, el ganador recibe una suma de dinero equivalente al doble de la terminación del número sorteado, más 100. En el otro, en cambio, el premio consiste en la cantidad de dinero que resulta de hallar el doble de: la terminación del número sorteado más 100.

- **a)** ¿Cuál de los dos juegos entrega mayor cantidad de dinero en un mismo sorteo?
- **b)** ¿Cuál es el mayor y cuál el menor monto que puede ganarse en cada uno de los juegos?

Para reflexionar sobre este problema, se necesita tener en cuenta la importancia de los signos. Observe esta otra situación:

Un juez lee el siguiente testimonio: "El mayordomo declaró el chofer es culpable". Según como se lea, se puede interpretar que el chofer culpa al mayordomo o que éste acusa al chofer:

"El mayordomo, declaró el chofer, es culpable"

"El mayordomo declaró: el chofer es culpable"

En esta oración, el signo de puntuación determina el significado.

c) Si en un cálculo intervienen distintas operaciones, ¿qué se resuelve primero? ¿Y después?
d) ¿Cuándo es necesario utilizar paréntesis, corchetes y llaves en el planteo de un cálculo?
e) Explique el significado de la expresión "separar en términos".
f) ¿Por qué debe respetarse esta jerarquía en las operaciones a la hora de resolver cálculos?

Ejercicios y problemas

Resuelva justificando con las propiedades que utiliza.

1) En una florería arman ramos pequeños y ramos grandes. Cada ramo pequeño tiene 3 rosas y cada ramo grande tiene 7 rosas. Si usaron 144 rosas y armaron 20 paquetes pequeños, ¿cuántos ramos grandes armaron?

2) En la heladería Ailén compró 3 cucuruchos. Pagó con un billete de $200 y recibió $35 de vuelto. Beto compró 2 vasitos. Pagó con un billete de $100 y recibió $30 de vuelto. Carla compró dos cucuruchos y un vasito. ¿Cuánto pagó Carla en total?
Seleccione el planteo que permite hallar la respuesta a este problema y resuélvalo:

- $200-35:3\cdot 2+100-30:2=$
- $(200-35:3\cdot 2)+(100-30:2)=$
- $200:3\cdot 2-35+100:2-30=$
- $(200-35):3\cdot 2+(100-30):2=$
- $\{[(200-35):3]\cdot 2\}+(100-30):2=$

3) En una bolsa hay caramelos de 3 gustos: frutilla, limón y naranja. En total hay 478 caramelos. Con los caramelos de frutilla se armaron 16 paquetitos de 6 caramelos y sobraron 2. Con los caramelos de limón se armaron 25 paquetitos de 8 caramelos y no sobró ninguno. Con los caramelos de naranja, ¿cuántos paquetitos de 5 caramelos se pueden armar?

4) Olivia perdió el contacto de una de sus amigas y necesita llamarla con urgencia. Recuerda la característica del número de teléfono y de las otras 7 cifras recuerda que son 0, 5, 6, 7, 8 y 9 pero no recuerda en qué orden ni cuál es la que se repite. ¿Cuál es el número de llamadas que a los sumo tiene que hacer Olivia para que una de ellas corresponda al número correcto?

5) Coloque los paréntesis, corchetes o llaves necesarios para que la siguiente igualdad sea verdadera:

$$2+3^{2}+9:3:3\cdot 5+5^{0}=21$$

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Se considera el problema de *hallar el número que sumado a 5 sea igual a 3*. Este problema no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que si se suma un natural a 5 se obtiene otro natural *mayor* que 5, y 3 es menor que 5.

La introducción de los *números enteros negativos* y el *cero* sirvió para resolver este tipo de problemas. En primer lugar, como ya se estudió, la adición entre cualquier natural y 0, es dicho natural:

$$3+0=3, \qquad 125+0=125.$$

Así, queda definida la adición entre un número natural y el 0, y la diferencia entre dos números naturales iguales:

$$3-3=0, \qquad 125-125=0$$

Se establece una "**correspondencia biunívoca**" entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^{+}$ (conjunto formado por los enteros positivos) es decir, a cada número natural le corresponde o se "identifica" con un único número entero positivo y viceversa, a cada número entero positivo le corresponde o se "identifica" con un único número natural. O sea

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{N} = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots \} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{Z}^{+} = \{ & +1, & +2, & +3, & +4, & +5, & +6, & +7, & \ldots \}
\end{array}$$

Además, para cada entero positivo se considera el *opuesto* como el número entero que sumado a él da como resultado 0. Así, por ejemplo el número que sumado a +1 da como resultado 0 se lo denota -1 y es el *opuesto* al número entero positivo $+1$. El opuesto de $+2$ es -2, el de $+3$ es -3 y así sucesivamente.

Todos los opuestos de los números enteros positivos se denominan *enteros negativos* y al conjunto formado por todos los números enteros negativos se lo denota con $\mathbb{Z}^{-}$. Así, los enteros negativos, los positivos y el cero dan lugar al conjunto de los *Números Enteros*.

$$\mathbb{Z}^{+} = \{+1, +2, +3, +4, \ldots\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}^{-} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$$

$$\therefore \ \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{+} \cup \mathbb{Z}^{-} \cup \{0\}$$

Además, así como -3 es el opuesto de $+3$, también se dice que $+3$ es el opuesto de -3, y que el 0 es el opuesto de sí mismo.

En símbolos:

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{Z} : \exists -a \in \mathbb{Z} / a + (-a) &= (-a) + a \\ &= 0\end{aligned}$$

Las operaciones de adición y de multiplicación se extienden a este nuevo conjunto.

La *diferencia* entre dos números enteros se denota con el símbolo "-", por ejemplo entre 10 – (-2).

El número 10 en este caso recibe el nombre de *minuendo*, el -2 se llama *sustraendo*, la operación es la *sustracción* y el resultado se lo conoce como *diferencia*.

Observe que la sustracción en $\mathbb{Z}$ es una adición en dicho conjunto. En efecto, la sustracción de dos números enteros se define como la adición entre el minuendo y el opuesto del sustraendo:

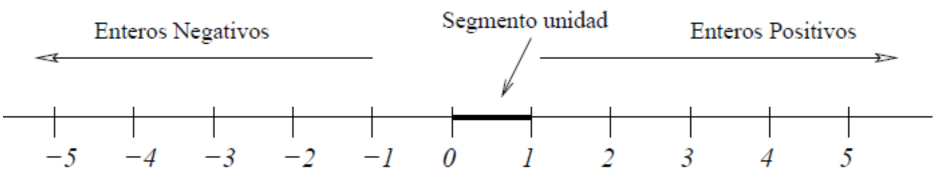
$$1-4=1+(-4)=-3, \qquad -7-15=-7+(-15)=-22$$

En símbolos: $\forall a,b \in \mathbb{Z} : a-b = a+(-b)$

Así como en $\mathbb{N}$ existe un orden natural: $1<2,\ \ 2<3,\ \ 3<4,$ etc., en $\mathbb{Z}$ también hay un orden compatible con el que se define en $\mathbb{N}$. Los números enteros conforman una sucesión infinita de números, donde cada elemento tiene un *sucesor* que se obtiene sumando $+1$ al número, y un *antecesor*, que se obtiene sumándole -1. Por ejemplo, -7 es el antecesor de -6 pues $-6+(-1)=-7$, y -5 es el sucesor de -6 pues $-6+(+1)=-5$. La siguiente es una lista ordenada de algunos enteros:

$$\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5,\ \ldots$$

Claramente, existen muchos puntos de la recta que no se corresponden con ningún número entero. La siguiente figura es una representación de algunos números enteros:



Propiedades del $\mathbb{Z}$

1) Es un conjunto <u>infinito</u> y totalmente ordenado por la relación "≤".
2) Todo número entero tiene siguiente y un anterior.
3) Este conjunto no tiene <u>primer elemento</u>, ni tiene <u>último elemento</u> (como consecuencia de 2)).
4) Entre dos números enteros existe un conjunto finito de números enteros. Por ello se dice que el conjunto $\mathbb{Z}$ es discreto.

En el conjunto de los números enteros están definidas entonces las operaciones de adición y de multiplicación, y satisfacen las mismas propiedades que se satisfacen en $\mathbb{N}$.

Además, la adición en $\mathbb{Z}$, cumple con la propiedad de existencia de elemento inverso. En efecto, ya se estudió la existencia del opuesto de todo número entero.

También la potencia de un número con exponente natural se define como la multiplicación iterada del número tantas veces como lo indique el exponente. Por ejemplo: $(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125$. Las potencias con exponente negativo no están definidas en este conjunto, excepto aquellas cuyas bases sean 1 y -1.

Por ejemplo: $1^{-5} = 1;\ (-1)^{-2} = 1;\ \text{ y }\ (-1)^{-3} = -1$

Para multiplicar dos números enteros, se tiene en cuenta la siguiente propiedad:

Propiedad:

El producto entre dos números enteros del mismo signo es positivo y el producto entre dos números enteros con distinto signo es negativo.

Actividad

a) ¿Por qué la sustracción no se define como operación en $\mathbb{Z}$?
b) Enuncie simbólica y coloquialmente las propiedades que cumplen la adición, la multiplicación y la potenciación en $\mathbb{Z}$.
c) ¿Posee la multiplicación en $\mathbb{Z}$ elemento inverso? ¿Por qué?

Definición:

Sean $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Se dice que a divide a b, o que a es divisor de b, o que b es múltiplo de a, sí y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}$ talque $b = a \cdot k$.

En símbolos:

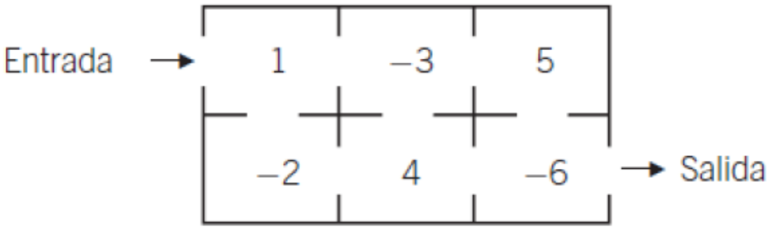
$$a \mid b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} / b = a \cdot k$$

Por ejemplo, 8 es divisible por 4, o bien 4 es divisor de 8, u 8 es múltiplo de 4.

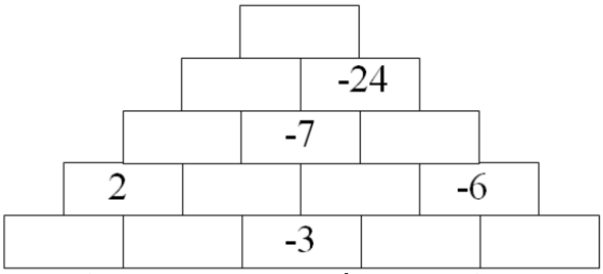
Ejercicios y problemas

Resuelva los siguientes problemas justificando con las propiedades de las operaciones del conjunto de los números enteros utilizadas:

6) ¿Cuál será el camino cuya suma sea la menor para ir desde la entrada a la salida? ¿Cuál será el camino para que la suma sea la mayor?



7) En la siguiente pirámide el número de cada casilla debe ser la suma de los dos números de las casillas sobre las que se apoya. Complétela:



8) Si Pitágoras murió en el año 493 a.C y nació en el año 580 a.C. ¿Cuántos años vivió?

9) El siguiente mensaje cifrado fue enviado por un espía; el servicio de inteligencia ha descubierto el código que lo descifra; este consiste en que cada letra tiene asociada una operación de números enteros. Resuelva las operaciones de números enteros que se indican y descifre el mensaje.

(-4)+(-15)=-19	Y	(-10)- 7	V	(-35):(-7)	A
6-(-4)	E	(-5)+9	T	(-28)-(-5)	Q
(-3)·2	N	9+3	I	(-9)·1	E
(-15):15	S	(-9)·(-1)	N	9+(-8)	U
12:(-3)	S	(-4)·0	O	(-20)+(-4)	E
(-4)·(-7)	D	(-15)+0	I	(-5)-(-7)	A
7+(-19)	E	0-7	S	30:5	A
-8-(-6)	Z	30:2	E	3+(-13)	E
5·4	I	14+(-17)	N	(-11)·3	C
(-84):(-4)	A	4·(-2)	S	7+1	R

MENSAJE:

											Y
28	20	10	-2	4	21	-6	-23	1	-12	-1	-19
-4	15	12	-8	-5	-17	-15	0	9	-9	-7	
-8	-24			2	-33	-10	8	-33	6	-3	

10) Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

a) Todos los números enteros son naturales.

b) Todos los números naturales son enteros.

c) Algunos números naturales son enteros.

d) Algunos números enteros son naturales.
e) Existen números naturales que no son enteros.

11) Resuelva el siguiente cálculo, justificando con las propiedades de las operaciones definidas en $\mathbb{Z}$:

$$\frac{\left(5^6:5^5\right)^4}{5^2}-\left[-(23+(-45))\right]+1001^0\cdot\left(-20:(-4)\right)=$$

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Siempre que se mide algo, longitudes, capacidad, volumen, áreas, tiempo, etc., se utilizan *unidades de medida*. Así es que se *mide* cuántas veces cabe cierta unidad en aquello que se quiere medir. Pero sea cual fuera esta unidad, no siempre ésta cabe una cantidad entera de veces, y es necesario *fraccionarla*. Es así como surgieron históricamente las fracciones. Siglos más tarde, a estas fracciones se les dio una categoría de *números* ya que sirvieron para resolver problemas numéricos como por ejemplo *"hallar el número que multiplicado por 5 dé como resultado 2".*

La solución de dicho problema es la fracción $\frac{2}{5}$, y se lee "dos quintos". Las fracciones se representan como cocientes entre dos números enteros, llamados *numerador* y *denominador* respectivamente, siendo el denominador distinto de 0. Por ejemplo:

$$\frac{7}{3},\quad \frac{-2}{8},\quad \frac{0}{-5},\quad \frac{3}{3},\quad \ldots$$

El conjunto formado por todas las fracciones, es decir aquellos números que pueden expresarse como cocientes entre dos números enteros, se denomina el conjunto de los *números racionales* y se lo denota con la letra $\mathbb{Q}$.

Se puede observar que todo número entero o natural puede escribirse como el cociente entre dicho número y 1. Por ejemplo: a 3 se lo puede escribir como $\frac{3}{1}$, a -5 como $\frac{-5}{1}$, a 0 como $\frac{0}{1}$.

Por este motivo, toda fracción con denominador 1 , se comporta algebraicamente como un número entero o natural en cada caso. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los números enteros y un subconjunto de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$ formado por todas las fracciones de denominador 1.

$$\begin{array}{l}
\mathbb{Z}=\{\ldots,\ -4,-3,-2,\ \ -1,0,\ \ +1,+2,+3,\ldots\} \\
\qquad\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \ \updownarrow\ \ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow \\
\mathbb{Q}^*=\{\ldots,\frac{-4}{1},\frac{-3}{1},\frac{-2}{1},\frac{-1}{1},\frac{0}{1},\frac{+1}{1},\frac{+2}{1},\frac{+3}{1},\ldots\}
\end{array}$$

Actividad

a) ¿Qué entiende por número racional? Elabore una definición coloquial y simbólica.
b) Investigue por qué se simboliza al conjunto de los números racionales con $\mathbb{Q}$?
c) ¿Por qué es posible identificar a los enteros como números racionales?
d) ¿Valen las propiedades de las operaciones ya estudiadas para este conjunto numérico? ¿Qué se pueden agregar?

Operaciones definidas en $\mathbb{Q}$

La adición de dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}-\frac{7}{3}=\frac{2-7}{3}=\frac{-5}{3} \quad \text{y} \quad \frac{2}{3}+\frac{7}{3}=\frac{2+7}{3}=\frac{9}{3}$$

En particular, se tiene que:

$$\frac{2}{3}+\frac{-2}{3}=\frac{0}{3}=0$$

Por ello se deduce que $\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$. Observe, además, que se definió a los números racionales como aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, por ejemplo $\frac{-2}{3}$. También se sabe que el cociente de dos números enteros con distinto signo es negativo. De esta manera, es intuitivo pensar que $\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$.

En particular, puede verse además que $\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$, pero por convención se elige el denominador positivo.

Si los denominadores son distintos el problema de sumar se resuelve buscando fracciones con el mismo denominador, equivalentes a las dadas. Por ejemplo, para sumar $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$, pueden utilizarse las fracciones $\frac{4}{6}$ y $\frac{3}{6}$:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$$

También,

$$\frac{1}{5}-\frac{2}{4}=\frac{4}{20}-\frac{10}{20}=\frac{4-10}{20}=-\frac{6}{20}$$

En símbolos:

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

La multiplicación entre dos números racionales se obtiene multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Por ejemplo:

$$\frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2 \cdot (-4)}{7 \cdot 3} = \frac{-8}{21} = -\frac{8}{21}$$

En símbolos:

$$\forall \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Propiedades de las operaciones:

La adición y la multiplicación de números racionales cumplen con todas las propiedades definidas en $\mathbb{Z}$ y además en la multiplicación se define el inverso multiplicativo.

Un número racional es el *inverso multiplicativo* de otro si el producto entre ambos es igual a 1.

En símbolos:

$$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\} : \exists \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} - \{0\} / \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

Por ejemplo:

El inverso multiplicativo de $-\frac{5}{3}$ es $-\frac{3}{5}$ pues $-\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{10}{10} = 1$

El inverso multiplicativo de $\frac{3}{2}$ es $\frac{2}{3}$ pues $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1$

Actividad

a) Enuncie coloquialmente y simbólicamente las propiedades de la adición y multiplicación en $\mathbb{Q}$.

b) ¿Todo número racional tiene inverso multiplicativo? Justifique.

Con la introducción de los números racionales se amplía la definición de potenciación con exponentes enteros negativos. Se define la potencia de un número racional con exponente negativo como otra potencia cuya base es el inverso multiplicativo de la base dada y cuyo exponente es el opuesto del dado.

En símbolos: $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}-\{0\}, \forall n \in \mathbb{Z}-\{0\}: \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

Por ejemplo:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$$

Observación: en la definición se excluye el caso en que la base y el exponente sean simultáneamente nulos, puesto que dicha potencia no está definida.

En el caso que la base sea nula y el exponente un entero no nulo, la potencia será nula. En caso de que el exponente sea nulo y la base un racional no nulo, la potencia será 1 tal como se definió en $\mathbb{Z}$.

En símbolos: $\forall n \in \mathbb{Z}-\{0\}: 0^n = 0 \quad \wedge \quad \forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}-\{0\}: \left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$

La *división* de un número racional por otro se define como el producto entre el dividendo y el inverso multiplicativo del divisor. Por ejemplo, la división del número racional 3 por $\frac{5}{4}$ consiste en obtener el producto entre 3 y $\frac{4}{5}$. La operación de división se simboliza con ":" o con la línea de fracción:

$$3 : \frac{5}{4} = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} \qquad \text{o} \qquad \frac{3}{\frac{5}{4}} = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

En símbolos:

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{c}{d} \neq 0: \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Propiedades de la potenciación en $\mathbb{Q}$

1) Distributiva de la potencia respecto de la multiplicación y de la división:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \wedge n \in \mathbb{Z}: (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \wedge n \in \mathbb{Z}: (a : b)^n = a^n : b^n$$

2) Ley Uniforme: $\forall x \in \mathbb{Q}: \quad a = b \quad \Rightarrow \quad a^x = b^x$

3) Ley Cancelativa $\forall x \in \mathbb{Q}: \quad a^x = b^x \quad \Rightarrow \quad a = b$

Propiedades especiales de la potencia

1) Producto de Potencias de igual Base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) Cociente de Potencias de igual Base: $a^n : a^m = a^{n-m}$

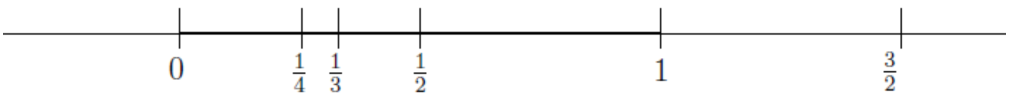
3) Potencia de otra Potencia: $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

Actividad

a) Enuncie coloquialmente las propiedades de la potenciación definidas anteriormente.
b) ¿Por qué en las definiciones de potencias de exponente negativo, la base de dichas potencias no puede ser 0?

Representación de los números racionales en la recta numérica

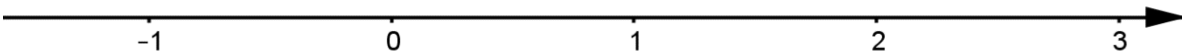
Los números racionales también pueden representarse en la recta. Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, … que son partes de una unidad, se representan precisamente fraccionando el segmento unidad en tantas partes como indica el denominador. La fracción $\frac{3}{2}$ se representa como 3 veces $\frac{1}{2}$. Es muy importante notar que si dos fracciones son equivalentes se representan por un mismo punto en la recta numérica.



Entre dos números enteros existen sólo un número finito de números enteros. Por ejemplo, entre 5 y -4 hay solo 8 números enteros; pero ¿cuántos números racionales hay?

Actividad

Represente en la recta numérica los números racionales $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$



a) Escriba tres números racionales comprendidos entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$ y represéntelos en la recta numérica.

b) ¿Pueden obtenerse más números racionales entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$, además de los ya escritos?

c) ¿Cuántos racionales es posible encontrar entre dos números racionales?

d) ¿Los números racionales completan la recta numérica?

e) **Definición**: si entre dos números distintos de un conjunto numérico, existen infinitos números de dicho conjunto, se dice que el conjunto es **denso**.
De acuerdo con la definición anterior: ¿$\mathbb{Q}$ es denso? ¿Y $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$?

Para responder al ítem d) basta tomar el promedio entre dos racionales y al resultado promediarlo con alguno de ellos, repitiendo el proceso indefinidamente. Por ejemplo, si se toman el 0 y el 2, se tiene que ambos son números racionales. Su promedio es el número que está entre ambos y equidista de los dos, y es igual a la semisuma de los dos números: $\frac{0+2}{2}=1$. El número 1 está entre 0 y 2 y es racional. Si se calcula ahora el promedio entre 0 y 1: $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. Nuevamente se obtiene un número racional; y repitiendo este proceso se obtiene una sucesión infinita de números racionales distintos, todos entre 0 y 2:

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4},\quad \frac{0+\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8},\quad \frac{0+\frac{1}{8}}{2}=\frac{1}{16},\quad \frac{0+\frac{1}{16}}{2}=\frac{1}{32},\quad \dots$$

¿Significa esto que si se representan todos los números racionales en una recta, se habrá "llenado" toda la recta? Se verá que no es así, que cualquiera sea el segmento unidad que se use, siempre quedarán puntos en la recta que no corresponden con ningún número racional.

También, puede definirse en $\mathbb{Q}$ la relación "$<$" como:

$$\forall \frac{p}{q},\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}:\quad \frac{p}{q}<\frac{r}{s} \quad\Leftrightarrow\quad ps<qr$$

En síntesis, pueden enumerarse las siguientes propiedades del conjunto $\mathbb{Q}$:

Propiedades del conjunto $\mathbb{Q}$

1) $\mathbb{Q}$ es un conjunto <u>infinito</u> y totalmente ordenado por la relación "≤".
2) No tiene primero ni último elemento.
3) $\mathbb{Q}$ es un conjunto **denso**, es decir, entre dos números racionales existen infinitos números racionales.

Expresión decimal

Los números racionales suelen expresarse también en notación *decimal*, por ejemplo: $\frac{5}{10}=0,5$

Aquellas fracciones que son equivalentes a una fracción con denominador 1, 10, 100 u otra potencia de 10 tienen una expresión decimal *finita*, y se denominan *fracciones decimales*. Por ejemplo, $\frac{7}{25}$ es equivalente a $\frac{28}{100}$, por lo tanto es una fracción decimal y se expresa en notación decimal como $0,28$ y se lee "veintiocho centésimos". Si no son equivalentes a una expresión con denominador que sea potencia de 10 tienen una expresión decimal *infinita periódica*. Esto significa que en la parte decimal existe una secuencia de uno o más números que se repite indefinidamente. A dicha secuencia se la denomina *periodo*. Por ejemplo, $\frac{3}{9}$ se expresa como $0,333...$, y su periodo es 3. Para denotar el periodo se lo suele marcar con un arco "   " sobre él.

Así, se tienen los siguientes ejemplos de números racionales y su representación decimal:

$$\frac{6}{100}=0,06\ ;\quad \frac{6}{9}=0,6666...=0,\widehat{6}\ ;\quad \frac{3540}{990}=3,58484...=3,584\,.$$

La importancia de la notación decimal es que todas las fracciones equivalentes tienen una misma representación, finita o periódica. Así, por ejemplo:

$$\frac{7}{4},\ \frac{14}{8},\ \frac{35}{20},\ \frac{175}{100}$$

son fracciones equivalentes, y todas con la misma representación decimal $1,75$ o $1,74\widehat{9}$.

Si se quiere expresar una fracción en su expresión decimal, sólo basta con resolver la división planteada entre el numerador y el denominador de dicha fracción.

Suponga ahora que se quiere expresar al número $2,345$ como fracción. Para ello, lo llamaremos p:

$$p=2,34545454545...\ (1)$$

Si se multiplica en ambos miembros por 10, de acuerdo con la propiedad uniforme de la multiplicación en $\mathbb{Q}$, se obtiene:

$$10p=23,4545454545...\ (2)$$

Multiplicando en ambos miembros de (1) por 1000, de acuerdo con la propiedad uniforme de la multiplicación en $\mathbb{Q}$, se obtiene:

$$1000p=2345,45454545...$$

Restando miembro a miembro la igualdad (2) de la (3) se obtiene:

$$990\,p = 2322$$

Multiplicando ambos miembros por $\dfrac{1}{990}$:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2322}{990} \\ &= \frac{129}{55} \end{aligned}$$

Como puede observar, el objetivo de este procedimiento es eliminar la parte decimal periódica de las expresiones decimales, multiplicando en ambos miembros de igualdades como la (1) por dos potencias de 10 adecuadas que permitan obtener la misma parte decimal de manera que al restar miembro a miembro ambas igualdades se anule la parte decimal para poder despejar el valor de p y hallar la expresión fraccionaria buscada.

Por último, cabe destacar que todas las fracciones decimales también tienen una representación decimal infinita periódica. Para ver esto, note que $\dfrac{1}{3} = 0,\widehat{3}$ y también $3 \cdot \dfrac{1}{3}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 3 \cdot 0,\widehat{3} \\ &= 0,\widehat{9} \end{aligned}$$

Así se tiene también que $4,53 = 4,52\widehat{9}$ y $1,239 = 1,238\widehat{9}$.

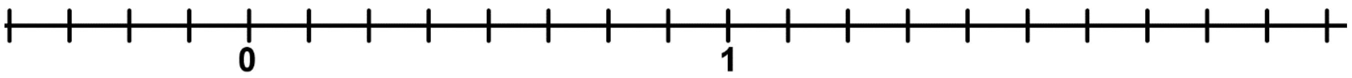
Ejercicios y problemas

12) Represente en la recta numérica los siguientes números racionales:

a) $\dfrac{5}{2}$ **b)** $-\dfrac{2}{3}$ **c)** $\dfrac{7}{4}$ **d)** $-\dfrac{9}{4}$ **e)** $\dfrac{10}{3}$

13) Ubique en la recta numérica los siguientes números racionales:

$$+1\frac{3}{4} \; ; \qquad -\frac{375}{1000} \; ; \qquad -\frac{3}{16} \qquad \text{y} \qquad 0,250$$



14) Determine la expresión decimal de los siguientes números racionales:

a) $\frac{23}{5}$ **b)** $-\frac{72}{12}$ **c)** $\frac{15}{11}$ **d)** $-\frac{49}{75}$ **e)** $\frac{451}{90}$

15) Exprese como fracción los siguientes números decimales:

a) $1,25$ **b)** $1,25$ **c)** $1,2\overset{\frown}{5}$ **d)** $0,352121...$ **e)** $1,119$

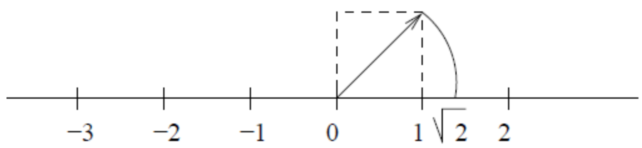
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Si se pudiera marcar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales se advertiría que quedarían aún infinitos números sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos en la recta que no se corresponden con ningún número racional. Dos problemas sencillos: determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a 1, y determinar la longitud de una circunferencia de radio 1, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales. Como se sabe, aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Sin embargo, no existe ningún número racional que cumpla la propiedad de que su cuadrado sea igual a 2. Esto significa, que no es posible medir la longitud de la diagonal con un número entero de *lados*, ni tampoco fraccionando dicho lado en subunidades tan pequeñas como se quisiera. Sin embargo, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama *raíz cuadrada de 2* y se lo denota $\sqrt{2}$. Más aún, $\sqrt{2}$ es comparable con los números racionales, en el sentido que se puede determinar qué números racionales, son menores y cuáles mayores que él.

La siguiente figura muestra la correspondencia entre $\sqrt{2}$ y un punto de la recta numérica: el arco de la circunferencia indica que la medida de la diagonal se corresponde con $\sqrt{2}$.



A continuación se demuestra que $\sqrt{2}$ no es racional:

La demostración arranca suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional y se llegará a una contradicción.

Si es racional, entonces puede expresarse como el cociente de dos números enteros:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ con } p,\ q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0$$

Se puede suponer que el máximo común divisor de p y q es 1, es decir que no tienen otros divisores comunes y $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible.

Elevando al cuadrado ambos miembros y multiplicando por q^2 se obtiene:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = p^2 \ (*)$$

Por lo tanto, p^2 es múltiplo de 2 y esto implica que p es múltiplo de 2 (puede demostrarse ésta afirmación). Es decir, $p = 2k, \ \ k \in \mathbb{Z}$. Si se reemplaza a p en (*) se obtiene: $(2k)^2 = 2q^2$. Resolviendo y simplificando: $4k^2 = 2q^2 \ \Rightarrow \ 2k^2 = q^2$, de donde se deduce que q^2 es múltiplo de 2 y por lo tanto q también es múltiplo de 2, lo cual es una contradicción puesto que se había supuesto que p y q no tenían divisores comunes y según este análisis 2 es un divisor común.

Por lo tanto $\sqrt{2}$ no es racional.

Actividad

- **a)** ¿Qué propiedades de la adición, multiplicación y potenciación se cumplen en el conjunto de los números irracionales?
- **b)** ¿Qué otros números irracionales conoce? ¿Cómo puede validar su respuesta?
- **c)** ¿Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los conjuntos numéricos estudiados y el de los irracionales?

Los números irracionales tienen también una representación decimal, y esta expresión decimal es *infinita no periódica*. Por ejemplo, un número cuya parte decimal está formada por infinitos ceros y unos, en el cual el primer 0 está seguido de un 1, el segundo de dos unos, el tercero de tres unos, y así sucesivamente:

$$235{,}101101110111101111101111110111111101111111110\ldots$$

Este número representa un número irracional porque no puede identificarse un "periodo" en la parte decimal del mismo. Si bien parecería poco frecuente estos tipos de números, los mismos constituyen, como se dijo, un conjunto infinito.

Algunos de los números irracionales que se utilizan con frecuencia son π: razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro, e: número de Neper y base del logaritmo natural y M : logaritmo en base 10 del número e. Los primeros dígitos decimales de estos números se listan a continuación:

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

$$M = 0{,}434294481903252\ldots$$

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales se simboliza con $\mathbb{R}$ y está formado por todos los números que son racionales **o** irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto de los números reales y los puntos de una recta numérica. Es decir, a cada punto de la recta numérica le corresponde un único número real y cada número real se representa por un único punto en la recta numérica. Esta propiedad se conoce con el nombre de **axioma de completitud**.

Además, entre dos números reales cualesquiera existen infinitos números reales, es por esto que $\mathbb{R}$ es un conjunto **denso**.

El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado por la relación "es menor que".

Se dice que $\boldsymbol{a}$ **es menor que** $\boldsymbol{b}$ y se escribe $a < b$, si $b - a$ es un número positivo. Desde el punto de vista geométrico, esto quiere decir que a queda a la izquierda de b en la recta numérica. Es equivalente decir que $\boldsymbol{b}$ **es mayor que** $\boldsymbol{a}$ y escribir $b > a$. El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$), quiere decir que $a < b$ o $a = b$ y se lee "a es menor o igual que b"

Propiedades de la adición

1) *La adición de números reales es cerrada, es decir la suma de dos números reales es un número real:*

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a+b \in \mathbb{R}$$

2) *La adición de números reales es asociativa:*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : (a+b)+c = a+(b+c)$$

3) *La adición de números reales es conmutativa:*

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a+b = b+a$$

4) *El 0 es elemento neutro para la adición de números reales:*

$$\begin{aligned}\forall a,b \in \mathbb{R} : \exists 0 \in \mathbb{R} \,/\, a+0 &= 0+a \\ &= a\end{aligned}$$

5) *El opuesto de un número real es elemento inverso para la adición de números reales:*

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R} : \exists (-a) \in \mathbb{R} \,/\, a+(-a) &= (-a)+a \\ &= 0\end{aligned}$$

6) *Propiedad uniforme de la adición de números reales:*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : \quad a = b \quad \Rightarrow \quad a+c = b+c$$

7) *Propiedad cancelativa de la adición de números reales:*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : \quad a+c = b+c \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Propiedades de la multiplicación

1) *La multiplicación de números reales es cerrada, es decir el producto de números reales es un número real:*

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a \cdot b \in \mathbb{R}$$

2) *La multiplicación de números reales es asociativa:*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3) *La multiplicación de números reales es conmutativa:*

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$$

4) *El 1 es elemento neutro para la multiplicación de reales:*

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R} : \exists 1 \in \mathbb{R} / a \cdot 1 &= 1 \cdot a \\ &= a\end{aligned}$$

5) *El inverso multiplicativo de un número real no nulo es elemento inverso para la multiplicación de reales:*

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} : \exists a^{-1} \in \mathbb{R} - \{0\} / a \cdot a^{-1} &= a^{-1} \cdot a \\ &= 1\end{aligned}$$

6) *El 0 es elemento absorbente para la multiplicación de reales:*

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 0 &= 0 \cdot a \\ &= 0\end{aligned}$$

7) *Propiedad uniforme para la multiplicación de reales:*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : \quad a = b \quad \Rightarrow \quad a \cdot c = b \cdot c$$

8) *Propiedad cancelativa para la multiplicación de reales:*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0 : \quad a \cdot c = b \cdot c \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

$$\begin{aligned}\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c\end{aligned}$$

Propiedades de los opuestos aditivos

1) $\forall a \in \mathbb{R} : (-1) \cdot a = -a$

2) $\forall a \in \mathbb{R} : -(-a) = a$

3) $\forall a,b \in \mathbb{R} : (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$
$= -(a \cdot b)$

4) $\forall a,b \in \mathbb{R} : (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

5) $\forall a,b \in \mathbb{R} : -(a + b) = -a - b$

6) $\forall a,b \in \mathbb{R} : -(a - b) = b - a$

Propiedades de la compatibilidad de la adición y la multiplicación de reales con la relación "<"

1) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : \quad a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$

2) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : \quad a < b \quad \wedge \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$

3) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : \quad a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot c < a \cdot c$

Potenciación y radicación

La potencia de un número real con exponente entero se define de la misma manera que para los números racionales. Las potencias con base no nula y exponente par son siempre positivas, por ejemplo:

$$(-3)^2 = 9, \quad (-2)^4 = 16, \quad 3^4 = 81$$

En particular, cualquier número y su opuesto elevados a un exponente par dan el mismo resultado. Por lo tanto, si se quiere hallar el número que elevado al cuadrado sea igual a 16 se tendrán dos soluciones: 4 y -4. Para distinguir entre ellas, se utilizará una notación diferente para cada una. Esto es se escribirá:

$$+\sqrt{16} = 4, \qquad -\sqrt{16} = -4 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{16} = \pm 4$$

En general, para cualquier número real *positivo* a, se define la raíz cuadrada positiva de a como el número real b tal que $b^2 = a$, y se lo denotará $b^2 = \sqrt{a}$

De manera análoga se define la raíz cuarta positiva, la raíz sexta positiva, y demás raíces con índice par. Así por ejemplo:

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3, \quad -\sqrt[6]{64} = -2, \quad \sqrt{100} = \pm 10$$

Por otro lado, las raíces de índice impar están definidas para todos los números reales, y tienen el mismo signo que el radicando. Por lo tanto, no es necesario hacer la distinción entre la raíz positiva y la negativa. Así por ejemplo:

$$\sqrt[3]{64} = 4 \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{-64} = -4$$

En símbolos:

- $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \wedge \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \wedge \forall n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \text{ par: } \sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \pm\frac{r}{s} \iff \left(\pm\frac{r}{s}\right)^n = \frac{p}{q},$
- $\forall \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \text{ impar: } \sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{r}{s} \iff \left(\frac{r}{s}\right)^n = \frac{p}{q},$

El número n se llama *índice* de la raíz (en la radicación) y *exponente* en la potenciación. $\frac{p}{q}$ es el *radicando* (en la radicación) y la *potencia* (en la potenciación). $\frac{r}{s}$ es la *raíz n-ésima* de $\frac{p}{q}$ (en la radicación) y la *base* (en la potenciación).

Se define a la potencia con exponente fraccionario de la siguiente manera:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ con } a \in \mathbb{R}^+, \quad m, n \in Z$$

Por ejemplo:

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}\,,\quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} \quad \text{y} \quad 64^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{64}\right)^3}$$

Además, es posible definir la potenciación de un número real positivo con cualquier exponente real, tema que excede a los objetivos de esta guía de estudio.

La potenciación con base real negativa no siempre da como resultado un número real, y sólo se puede dar una definición general en el campo de los números complejos.

Es importante notar que la potenciación y la radicación no son distributivas con respecto a la adición. Por ejemplo: $(3+5)^2 = 64$ y $3^2 + 5^2 = 34$ por lo cual $(3+5)^2 \neq 3^2 + 5^2$.

La siguiente propiedad es conocida como **diferencia de cuadrados**: la diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de éstos números:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

Esta propiedad surge fácilmente aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en el segundo miembro, y suele ser muy útil a la hora de realizar cálculos.

Así por ejemplo:

$$821^2 - 820^2 = (821+820)\cdot(821-820)$$

Entonces es más sencillo resolver el segundo miembro que calcular la diferencia entre los cuadrados de 821 y 820.

Propiedades de la potenciación

Si $a, b, m \text{ y } n$ son números reales cualesquiera, de manera que las siguientes potencias estén definidas, se cumplen las siguientes propiedades:

1) *Producto de potencias de igual base:* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2) *Cociente de potencias de igual base:* $a^m : a^n = a^{m-n}$
3) *Potencia de otra potencia:* $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
4) *Propiedad distributiva de la potenciación respecto a la multiplicación:* $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5) *Propiedad distributiva de la potenciación respecto a la división:* $(a : b)^n = a^n : b^n$

Demuestre las siguientes propiedades de la radicación

a) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ con $a > 0$ y $n, k \in \mathbb{Z}^+$.

b) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ con $a > 0$ y $n, k \in \mathbb{Z}^+$.

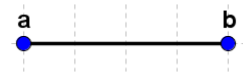
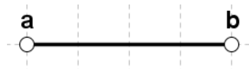
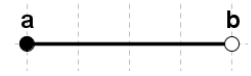
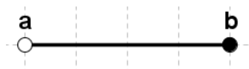
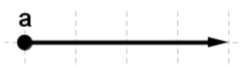
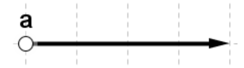
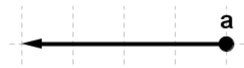
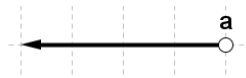
c) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ con $a > 0$ y $n, k, m \in \mathbb{Z}^+$.

Intervalos

Otra manera de representar en símbolos conjuntos de **números reales** definidos por desigualdades es utilizando la notación de **intervalos**. Los mismos se presentan con mucha frecuencia en el cálculo y corresponden geométricamente a segmentos lineales. Esta notación es una forma más sencilla de representar subconjuntos de la recta numérica.

Se utilizan paréntesis para indicar que un extremo no pertenece (ese número no pertenece al intervalo) y corchetes para indicar que el extremo pertenece (ese número pertenece al intervalo). Por ejemplo, para $a < b$, en la notación de intervalo el número menor se escribe siempre a la izquierda del mayor:

A continuación se resumen los posibles intervalos que pueden definirse, junto con su notación como conjunto y su representación gráfica en la recta numérica.

Definición por comprensión	Notación de intervalo	Representación gráfica
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$ Intervalo cerrado de a a b.	$[a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$ Intervalo abierto de a a b	(a, b)	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$ Intervalo semiabierto a derecha. Abierto en b.	$[a, b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$ Intervalo semiabierto a izquierda. Abierto en a.	$(a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\}$ Intervalo semicerrado. Cerrado en a.	$[a, +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$ Intervalo semiabierto. Abierto en a.	$(a, +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a\}$ Intervalo semicerrado. Cerrado en a.	$(-\infty, a]$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$ Intervalo semiabierto. Abierto en a.	$(-\infty, a)$	

Los símbolos ∞ y $-\infty$ **no representan números**; son símbolos que nos indican que el intervalo no tiene un valor máximo o un valor mínimo. Por lo tanto, siempre se escribe un paréntesis junto al símbolo ∞.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número real se define como la distancia entre dicho número y el 0 en la recta numérica. Se denota escribiendo el número entre barras. Por ejemplo: $|3|=3$, $|-4|=4$ y $|0|=0$.

De esta manera: $\forall a \in \mathbb{R}: \ |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Propiedades del valor absoluto

1) *El valor absoluto de cualquier número real es no negativo*
$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq 0$$
2) *El valor absoluto de dos números opuestos es el mismo:*
$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = |-a|$$
3) *El valor absoluto del producto de dos números reales cualesquiera es igual al producto de los valores absolutos de dichos números:*
$$\forall a,b \in \mathbb{R} : |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
4) *El valor absoluto del cociente de dos números reales cualesquiera es igual al cociente de los valores absolutos de dichos números:*
$$\forall a,b \in \mathbb{R} : |a : b| = |a| : |b|$$
5) *El valor absoluto de la suma de dos números reales cualesquiera es menor o igual que la suma de los valores absolutos de dichos números (desigualdad triangular):*
$$\forall a,b \in \mathbb{R} : |a+b| \leq |a| + |b|$$
6) $\forall a,k \in \mathbb{R}: \ |a| \leq k \ \Rightarrow \ -k \leq a \leq k$

7) $\forall a,k \in \mathbb{R}: \ |a| \geq k \ \Rightarrow \ a \leq -k \ \vee \ a \geq k$

Notación científica

Los científicos utilizan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana, además del Sol, Próxima Centauri, está a aproximadamente a 40000000000000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0,00000000000000000000000166 g. Estos números resultan difíciles de escribir y de leer, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica*.

Se dice que un número real positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde} \qquad 1 \leq a < 10 \qquad \text{y} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

De esta manera, la distancia de la Tierra a la estrella Próxima Centauri puede escribirse mediante notación científica de la siguiente manera:

$$40000000000000 = 4 \times 10^{13}$$

Y la masa del átomo de hidrógeno:

$$0{,}00000000000000000000000166 = 1{,}66 \times 10^{-24}$$

Radicales
Como no es posible convertir a fracción un número irracional, se trabaja con **radicales**: expresiones formadas por el signo radical y una expresión numérica o literal como radicando y además raíces no exactas.

Analizando radicando e índices:

- Si **n** impar $\Rightarrow$ $\exists$ raíz real única y del mismo signo que el radicando.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[5]{-32} = -2$$

- Si **n** par y radicando positivo $\Rightarrow$ $\exists$ dos raíces reales opuestas.

$$\sqrt{4} = \pm 2 \qquad \sqrt[4]{81} = \pm 3$$

- Si **n** par y radicando negativo $\Rightarrow$ $\nexists$ solución en $\mathbb{R}$.

$\sqrt{-16}$ no tiene solución, pues ningún número real elevado a una potencia par, da por resultado un número negativo.

Para evitar estos inconvenientes, se trabaja con **Radicales Aritméticos**, aquellos donde $a \in \mathbb{R}^{+} \wedge n \in \mathbb{N}$.

1) Multiplicación o División del índice y el exponente por un mismo número natural:
El valor de un radical no se altera si se multiplica o divide exactamente por un mismo número, el índice y el exponente.

- $\sqrt[n]{a^t} = \sqrt[n \cdot p]{a^{t \cdot p}}$
- $\sqrt[n \cdot p]{a^{t \cdot p}} = \sqrt[n]{a^t}$ (este proceso se llama **simplificación**)

2) Extracción de factores fuera del radical:
En algunos casos la simplificación no puede efectuarse de modo directo, sin embargo, si el exponente del radicando es mayor que el índice, después de descomponer convenientemente el radicando, es posible utilizar la simplificación para realizar extracciones de factores fuera del radical.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^7} &= \sqrt[3]{a^6 \,.\, a^1} \\ &= \sqrt[3]{a^6} \,.\, \sqrt[3]{a} \\ &= a^2 \,.\, \sqrt[3]{a} \end{aligned}$$

No es posible realizar extracciones de factores cuando el exponente del radicando es menor que el índice, en este caso se dice que el radical es **irreducible**.

3) Radicales Semejantes:

Los radicales aritméticos irreducibles que tienen el mismo índice y el mismo radicando, se llaman **radicales semejantes**.

Operaciones con radicales

En las expresiones $a^{\frac{m}{n}}$, con $m,n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0,$ $a > 0$, se deben verificar las siguientes condiciones para operar de manera más sencilla:

- La base a debe estar expresada como producto de factores primos.
- El exponente $\frac{m}{n}$:
  - debe ser positivo: $\frac{m}{n} > 0$.
  - el numerador debe ser menor que el denominador: $m < n$.
  - ser una fracción irreducible: $mcd(m,n) = 1$.

Estas condiciones tienen su justificación en dos teoremas matemáticos muy importantes:

- El **Teorema Fundamental de la Aritmética** que afirma que "*todo número entero, distinto de 1, -1 y 0 se puede representar de forma única como un producto finito de números primos*".
- El otro nos asevera que "*si* p *es un número primo y* $mcd(\mathrm{m},\mathrm{n}) = 1$ *(*m *y* n *primos entre sí), entonces* $\sqrt[n]{p^m}$ *es un número irracional*".

Adición y ***Sustracción***: *la suma algebraica de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes dados.*

Para determinar si radicales no semejantes pueden transformarse en radicales semejantes equivalentes a los dados, se extraen los factores posibles de cada radical:

$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{81} - 4\sqrt[3]{24} &= 2\sqrt[3]{3^4} - 4\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} \\ &= 2 \cdot 3\sqrt[3]{3} - 4 \cdot 2\sqrt[3]{3} \\ &= 6\sqrt[3]{3} - 8\sqrt[3]{3} \\ &= -2\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{54} &= \sqrt{2} + \sqrt{2^3} - \sqrt{3^2 \cdot 6} \\ &= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{6} \\ &= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

Cuando los radicales no pueden reducirse a radicales semejantes, la operación queda indicada.

Multiplicación: *el producto de radicales de* <u>*igual índice*</u>*, es otro radical de igual índice a los dados y radicando, el producto de los radicandos factores.*

El producto de radicales de <u>*distinto índice*</u> *se busca el* <u>*común índice*</u>*, o sea el múltiplo común menor de los índices dados, para transformar dicho producto en radicales de igual índice. O simplemente se los expresa como potencias de exponente fraccionario y se aplican las propiedades estudiadas de las potencias.*

$$\begin{aligned}\sqrt{10}\cdot\sqrt{2} &= \sqrt{10\cdot 2}\\ &= \sqrt{2^2\cdot 5}\\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a} &= a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{5}}\\ &= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}\\ &= a^{\frac{37}{30}}\\ &= \sqrt[30]{a^{37}}\\ &= a\sqrt[30]{a^7}\end{aligned}$$

División:

- de radicales de igual índice:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{32}:\sqrt[3]{4} &= \sqrt[3]{32:4}\\ &= \sqrt[3]{8}\\ &= 2\end{aligned}$$

- de radicales de distinto índice:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a^7}:\sqrt[6]{a^5} &= a^{\frac{7}{4}}:a^{\frac{5}{6}}\\ &= a^{\frac{7}{4}-\frac{5}{6}}\\ &= a^{\frac{11}{12}}\\ &= \sqrt[12]{a^{11}}\end{aligned}$$

Pero esto sólo es posible si los radicandos son posibles de dividir.

$$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a : a^2} = \sqrt[3]{a^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

Aún la división no quedó resuelta por lo que se debe encontrar otra fracción equivalente a ella en cuyo denominador no figure un radical, o sea un número racional, por ello este procedimiento se llama **racionalización**.

1) El denominador es un radical único:
Se multiplica numerador y denominador por un radical de manera tal que en el denominador quede un número racional.

$$\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2 a}}{\sqrt[3]{2^2 a}} = \frac{\sqrt[3]{4a}}{\sqrt[3]{2^3 a^3}} = \frac{\sqrt[3]{4a}}{2a}$$

2) El denominador es un binomio:
Se multiplica numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador, para que en el denominador quede expresada una diferencia de cuadrados y así obtener un número racional como divisor.

$$\frac{3}{4+\sqrt{5}} = \frac{3}{4+\sqrt{5}} \cdot \frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} = \frac{12-3\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{12-3\sqrt{5}}{11} = \frac{12}{11} - \frac{3}{11}\sqrt{5}$$

Observe que con la racionalización de denominadores, se está resolviendo una división planteada en el conjunto de los números irracionales.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

A pesar de la definición del conjunto de los números reales, se presentaron a través de la historia cuestiones como hallar la solución de ecuaciones como:

$$x^2+1=0$$

la cual no tiene solución real, es decir no existe ningún número real cuyo cuadrado aumentado en 1 unidad sea igual a cero.

Por este motivo surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números reales para poder dar solución a este problema y a otros que verá a lo largo de su carrera.

Para comenzar con la construcción de este nuevo conjunto numérico se define a la unidad imaginaria i de la siguiente manera:

$$i^2=-1$$

A partir de esta definición se construye el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{C}=\{z=a+bi\,/\,a,b\in\mathbb{R}\}$$

De esta manera, existe una correspondencia biunívoca entre los números complejos de la forma $z=a+0i$ y los números reales. Es decir, se cumple que $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Este conjunto numérico se estudiará en mayor profundidad en el espacio curricular de Problemática del Álgebra II.

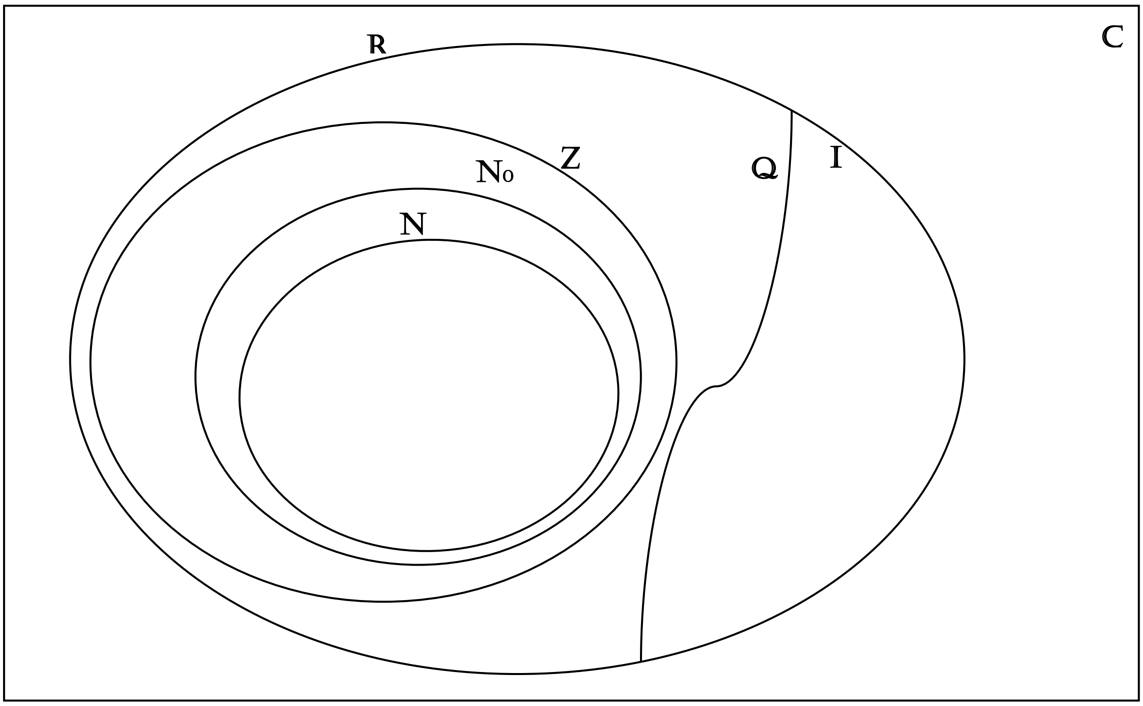
Ejercicios y problemas

16) Resuelva y ubique el resultado en el siguiente diagrama de los conjuntos numéricos:

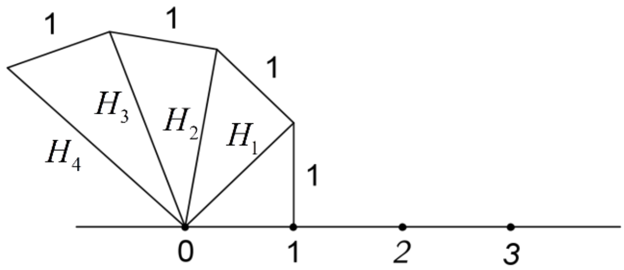
a) $\sqrt[3]{-27-37}=$ b) $\sqrt[3]{(-27):(-8)}=$ c) $\sqrt[4]{(-16):(-1)}=$

d) $\sqrt{-81}=$ e) $\sqrt{25:16}=$ f) $\sqrt{49-36}=$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}=$ h) $(6-2\cdot 3)^5=$ i) $\sqrt{10^2-8^2}=$



17) Todos los triángulos de la figura son rectángulos. El más pequeño tiene catetos unitarios y, en los restantes, uno de los catetos tienen medida igual a 1. Calculá la medida de la hipotenusa de los triángulos y trazá las circunferencias con centro en 0 y radio cada hipotenusa. ¿Qué números representan las intersecciones de cada circunferencia con la recta numérica?



18) Represente en la recta numérica los siguientes números, construyendo triángulos rectángulos adecuados como en el problema anterior:

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{8}$ **c)** $-\sqrt{10}$ **d)** $-\sqrt{29}$ **e)** $\sqrt{33}$ **f)** $2+\sqrt{2}$

19) Escriba:

a) los dos números naturales más próximos entre los que se encuentra $\sqrt{67}$ **.**

b) los dos números decimales más próximos con una cifra decimal entre los que se encuentra $\sqrt{67}$ **.**

c) los dos números decimales más próximos con tres cifras decimales entre los que se encuentra $\sqrt{67}$.

20) Transforme las expresiones decimales en expresiones fraccionarias y resuelva:

a) $\dfrac{2}{5}+0,333333...-0,36+0,0\widehat{6}=$

b) $\dfrac{(0,66666...-2)^2}{-\dfrac{3}{4}\sqrt{0,25}}=$

c) $\sqrt[3]{0,\widehat{8}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}+\dfrac{1}{46}\cdot 2,04444...=$

d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{100}\right)^{-2}\cdot 0,2+\left[(0,3)^{-2}\right]^{-1}=$

21) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

a) $\dfrac{58}{15}<\sqrt{15}<\dfrac{39}{10}$

b) $\sqrt[3]{20}<2,714<\dfrac{124}{45}$

c) $\sqrt[4]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[5]{7}$

22) Escriba tres números racionales que se encuentren entre $1{,}4$ y $\sqrt{2}$.

23) Invente un número irracional mayor que 2 pero menor que 2,1.

24) Los siguientes números irracionales fueron inventados siguiendo una regla. Descubra dicha regla y escriba las 8 cifras siguientes:

a) 0,10110011100011110000… **b)** 0,10200300040000…

25) Encuentre un número irracional que esté entre $\sqrt{2}$ y 2. ¿Podrá encontrar otro? Justifique.

26) En el conjunto de todos los números x tales que $2 < x < \sqrt{8}$

a) ¿Cuántos números naturales hay en este conjunto? ¿Por qué?
b) ¿Cuántos números racionales hay en este conjunto? ¿Por qué?
c) ¿Cuántos números irracionales hay en este conjunto? ¿Por qué?
d) ¿Cuántos números reales hay en este conjunto? ¿Por qué?

27) Extraiga todos los factores que pueda fuera del radical:
a) $\sqrt[3]{ab^2c^4d^6} =$
b) $\sqrt[3]{8a^2b^5} =$
c) $\sqrt[3]{81} =$
d) $\sqrt[5]{64a^2b^5c^8} =$

28) Resuelva:
a) $\sqrt{8} + 2\sqrt{8} + 4\sqrt{8} =$
b) $\sqrt{5}\sqrt{5} - \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{24} =$
c) $2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + 2\sqrt{2} =$
d) $\sqrt{72} - \sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{128} =$
e) $a\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{a^5} =$
f) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} \cdot (1 + \sqrt[4]{27}) =$

29) Si la arista de un cubo mide $\sqrt{5}$. Calcule el perímetro y el área de una cara del cuerpo. Luego el volumen de dicho cuerpo.

30) Calcule la medida de la diagonal de un cubo de arista 2 unidades.

31) Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{\sqrt{32}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=$

b) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=$

c) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}=$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=$

e) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=$

f) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\right)^{4}}{\sqrt[5]{8}}=$

g) $\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^{-3}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{5}}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{5}{4}}\right)^{-1}}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}}}=$

32) Exprese cada conjunto como intervalos y represéntelos en la recta numérica:

$A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,0\le x\le 3\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\le 1\dfrac{1}{2}\right\}$

$C=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\le\sqrt{10}\right\}$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}/\,|2x-1|\le 5\right\}$

$E=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\sqrt{2}<x\le 2+\sqrt{2}\right\}$

$F=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\dfrac{1}{2}\le 3-|x|\right\}$

$G=\{x\in\mathbb{R}/\,|3-x|>2\}$

33) Escriba en notación científica el número indicado en cada enunciado:

a) El diámetro de un electrón es alrededor de 0,0000000000004 centímetros.
b) Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.
c) La masa de la Tierra es de unos 5970000000000000000000000000000 mg
d) Tu edad en segundos.
e) La masa de una molécula de oxígeno es de unos 0,000000000000000000000000053 mg.

34) Con la información obtenida en el problema anterior, ¿Cuántas moléculas de oxígeno llenarían el Planeta Tierra?

35) Una sala sellada de un hospital con medidas 5m de ancho, 10m de largo y 3m de alto, está llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000L y 22,4L de cualquier gas contienen $6,02\times10^{23}$ moléculas. ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en la sala?

Bibliografía

- Demana, F. "*Precálculo*". Séptima Edición. Ed. Pearson. (2007).
- Kisbye, P. & Merlo, D. "*Cálculo Algebraico*". Series C – FaMAF. (2010).
- Larson, R. "*Precálculo*". Octava Edición. Ed. Cengage. (2011).
- López, A. "*Matemática Moderna* 3" Cuarta Edición. Ed. Stella.
- Rojo, A. "*Álgebra I*". Novena Edición. Ed. El Ateneo. 1984.
- Stewart, J. "*Precálculo*". Sexta Edición. Ed. Cengage. (2012).