3 FUNCIÓN LINEAL. ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES

Contenidos

Premios por millas acumuladas

Dos líneas aéreas ofrecen las siguientes promociones:

PROMOCIÓN ANUAL
Ud. gana volando por LINE ALL

El costo de su pasaje le acreditará automáticamente el 75% de su valor en millas. Así, si el 75% de su pasaje es de $ 300, se le acreditarán 300 millas.
Cuando Ud. lo desee, podrá canjear (total o parcialmente) su puntaje actual por un pasaje cuyo destino resulte, en millas, menor o igual que la cifra acumulada.

Ricardo Rodríguez es argentino y trabaja como representante de una empresa multinacional en Madrid. Viaja a esa ciudad periódicamente y es fiel cliente de la línea aérea Line All.

Martín Suárez, su sobrino, es un estudiante argentino que ha sido becado por la Universidad Autónoma de Madrid. Su beca tiene un año de duración y eligió, para viajar, la compañía Right Line.

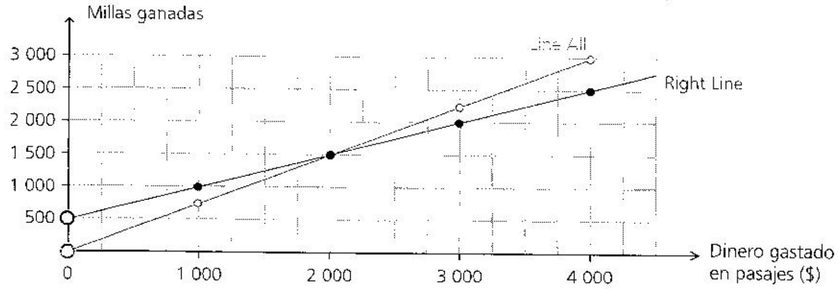
Ricardo le propone a Martín que cambie de compañía ya que ambos coinciden en la fecha de regreso a Buenos Aires. Pero Martín le asegura que no le conviene la promoción de la empresa Line All, porque obtiene mayor cantidad de millas gratis si viaja por la línea Right Line, así que no acepta la proposición.

Por su parte, Ricardo insiste en ella porque ha estudiado la promoción de ambas compañías y asegura que, por cada peso abonado, la línea aérea Line All premia con más puntos que la compañía Right Line.

¿Es posible que los dos tengan razón?

Para interpretar el problema, hacemos un gráfico cartesiano.

Marcamos algunos puntos que pertenecen a la recta de color rojo, correspondientes a la promoción de la compañía Line All, y algunos puntos que pertenecen a la recta de color azul, correspondientes a la promoción de la compañía Right Line.



Considerando que en la fecha de regreso a Buenos Aires, Martín habrá acumulado las millas correspondientes a $ 1 000 (el costo de su pasaje de ida a Madrid) y que Ricardo contará con las millas que corresponden a un total de $ 4 000 gastados en concepto de pasajes (ya que ha viajado varias veces), interpreten el gráfico y completen:

- Si ambos viajaran por la compañía Line All, Martín ganaría .... millas, mientras que Ricardo ganaría .... millas.
- Si ambos viajaran por la compañía Right Line, Martín ganaría .... millas, mientras que Ricardo ganaría .... millas.
- ¿En qué caso es indistinta la compañía aérea elegida por ambos? ....
- ¿En qué caso cambiará Martín de opinión? ....

El argumento de Ricardo es tan válido como el de Martín, porque parten de condiciones iniciales diferentes. Como Ricardo es un hombre de negocios y viaja con mucha frecuencia en avión, sabe que anualmente gastará más de $ 2 000 en concepto de pasajes; por lo tanto, la compañía que más le conviene es .... Podemos interpretar esto en el gráfico al observar que para los valores de x superiores a $ 2 000, la recta correspondiente a Line All está por encima de la recta correspondiente a la otra compañía.

Martín es un estudiante que difícilmente gastará más de $ 2 000 en pasajes; entonces, le conviene ganar las 500 millas gratis que le ofrece Right Line. Podemos interpretarlo en el gráfico al observar que para valores de x inferiores a $ 2 000, la recta correspondiente a la compañía .... está por .... de la recta correspondiente a la otra compañía.

Practiquen

1. Tres de estos cinco puntos pertenecen al gráfico de la función de **IR** en **IR**: $y = 3x + 2$. Indiquen cuáles son.
   $A = (1; 5)$ $B = (2; 6)$ $C = (-2; -4)$
   $D = \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ $E = (0; 3)$

2. a) Escriban tres pares ordenados que pertenezcan al gráfico de la función de **IR** en **IR**: $y = -\frac{1}{5}x + 3$
   b) Escriban tres pares ordenados que no pertenezcan a dicho gráfico.

La función lineal

Llamamos **función lineal** a toda función del tipo: $\mathbf{f(x) = ax + b}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales. Su dominio es $\mathbb{R}$ porque es el conjunto más amplio de números reales para el cual la fórmula tiene sentido.

- Completen la siguiente tabla que muestra parte del registro de los adherentes a la promoción de la compañía Line All que figura en la página 48.

[illegible]	[illegible]
100	75
500	
	112,50
400	

La cantidad de .... ***depende*** de la cantidad de ....

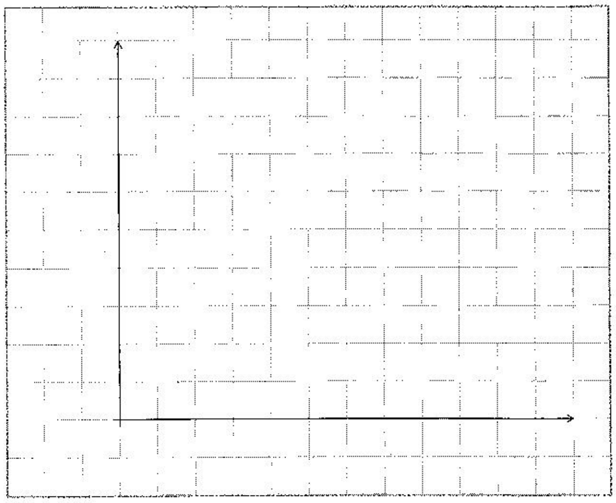
Si identificamos con la letra $\boldsymbol{x}$ el precio del pasaje y con la letra $\boldsymbol{y}$ el puntaje otorgado en millas, la fórmula que vincula estas dos ***variables*** es:

$y = \frac{3}{4}x$ o bien $y = \frac{75}{100}x$ o bien $y = 0{,}75x$

- Esas fórmulas corresponden a una función lineal porque son del tipo: $\boldsymbol{y = ax + b}$, donde $\boldsymbol{a}$ = ... = ... = ... y $\boldsymbol{b}$ = ...

Representen los puntos de la tabla en el sistema de ejes cartesianos.
Como podrán observar, esos puntos ***están alineados***. Tracen la recta que los contiene.

¿Cuántas millas gana un cliente por cada peso que gasta en comprar un pasaje? ....



- Imaginemos que la compañía agrega esta condición a su promoción:
"Todos los clientes de nuestra empresa que hayan realizado al menos un vuelo durante el año anterior, tendrán automáticamente la cantidad inicial de 100 millas".

Representen esta situación en el mismo gráfico y escriban la nueva fórmula: ....

¿Qué pueden afirmar acerca de las millas que el cliente gana por cada peso gastado? ....

El gráfico de una función lineal es una recta no vertical.

Practiquen

3. Los puntos A, B, C, D y E pertenecen al gráfico de la función lineal $y = 2x - 5$. Completen los valores que faltan.
   $A = (0; ....)$ $B = (\frac{1}{4}; ....)$ $C = (........; 0)$
   $D = (........; \frac{2}{5})$ $E = (........; ....)$
4. Grafiquen las funciones:
   $f(x) = 3$ $g(x) = \frac{2}{3}x - 4$ $h(x) = -5x + 2$
5. Grafiquen, en cada caso, una recta que pase por el origen y que además cumpla que:
   a) por cada unidad que aumenta la abscisa, la ordenada aumente siempre una unidad y media;
   b) por cada 2 unidades que aumenta la abscisa, la ordenada disminuya 3 unidades;
   c) al aumentar la abscisa, la ordenada no se modifique.
6. I) Consideren: $f(x) = -2x$
   a) Hallen $f(-1)$, $f(0)$ y $f(5)$.
   b) ¿Para qué valor de x se cumple que $f(x) = 5$?
   II) Si $g(x) = 4$, hallen $g(2)$, $g(0)$ y $g(-3)$.
7. Despejen y en la siguiente ecuación: $\frac{x}{(-5)} + \frac{y}{4} = 1$, grafiquen la recta e indiquen en qué puntos interseca a los ejes x e y.

Pendiente

Llamamos **pendiente** de una recta al aumento o a la disminución de la variable $\boldsymbol{y}$ por cada aumento unitario de la variable $\boldsymbol{x}$.

De acuerdo con el ejemplo de la página 50, por cada peso que el cliente gasta en comprar su pasaje (es decir, cada vez que la variable $\boldsymbol{x}$ aumenta una unidad), gana 0,75 millas (es decir que la variable $\boldsymbol{y}$ aumenta 0,75). Por eso, la ***pendiente*** de esa recta es ....

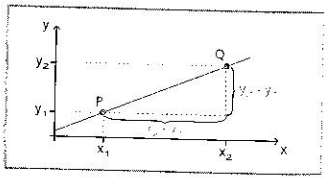
Podemos observar **que la pendiente es el número que multiplica a la variable $\boldsymbol{x}$ en la fórmula de la función**:

$$f(x) = \quad x + b$$

Supongamos que $\mathbf{P} = (x_1; y_1)$ y $\mathbf{Q} = (x_2; y_2)$ son dos puntos diferentes de la recta correspondiente al gráfico de una función lineal; entonces, podemos calcular la **pendiente** como:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Mide el cambio en el eje } y \\ \longleftarrow \text{Mide el cambio en el eje } x \end{array}$$

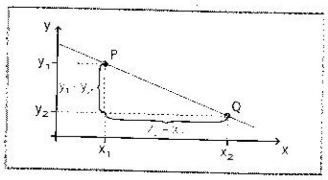
La pendiente de una recta puede ser **positiva, negativa** o **cero**. Vamos a analizar estos tres casos observando los gráficos, en los cuales $x_2 > x_1$, es decir que **el denominador de la pendiente es positivo**.



- Si la **pendiente** es **positiva**, el numerador es ...., es decir: $y_2 - y_1$ ...... 0.

  Entonces: $a > 0$ y $x_2 > x_1 \implies y_2 \ldots\ldots y_1$

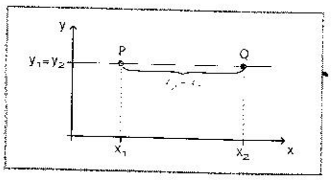
  Esto significa que la función es **creciente**.



- Si la **pendiente** es **negativa**, el numerador es ...., es decir: $y_2 - y_1$ ...... 0.

  Por lo tanto: $a < 0$ y $x_2 > x_1 \implies y_2 \ldots\ldots y_1$

  Esto significa que la función es ....



- Si la **pendiente** es **cero**, el numerador es cero; entonces:

  $a = 0 \implies y_2 - y_1 = \ldots\ldots\ldots \implies y_2 \ldots\ldots y_1$

  Esto significa que todos los valores de las abscisas tienen la misma imagen. En este caso, la función es **constante**.

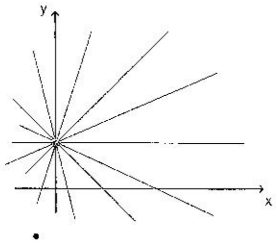
ractiquen

8. a) Representen en un mismo gráfico las rectas:
   I) $y = x,\ y = \frac{1}{2}x,\ y = \frac{1}{4}x,\ y = 2x,\ y = 4x$
   II) $y = -x,\ y = -\frac{1}{2}x,\ y = -\frac{1}{4}x,\ y = -2x,\ y = -4x$
   b) Enuncien conclusiones acerca de la relación que existe entre el valor de la pendiente y la amplitud del ángulo que queda determinado entre el semieje positivo de las abscisas y la recta, sabiendo que el ángulo se mide en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.
9. a) Propongan tres funciones constantes no nulas y después grafíquenlas.
   b) Escriban la fórmula de la función lineal cuyo gráfico es el eje x.

Ordenada al origen

Toda recta que no sea vertical **corta el eje y** en un punto en el cual $x = 0$.
En una función, a **la imagen del cero** la llamamos **ordenada al origen**.
Para hallar la ordenada al origen de la función lineal $f(x) = ax + b$, planteamos:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$



Entonces, la pendiente de la recta y la ordenada al origen quedan perfectamente determinadas en la fórmula de la función lineal correspondiente:

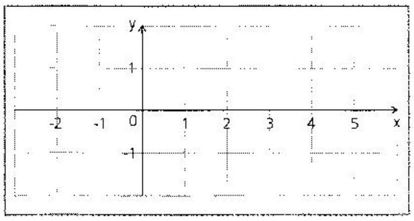
$$\underbrace{f(x) = ax}_{\text{Pendiente}} + \underbrace{b}_{\text{Ordenada al origen}}$$

Gráfico de una recta, dadas su pendiente y su ordenada al origen

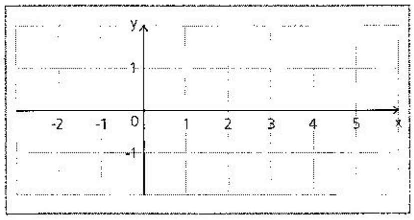
Si conocemos la pendiente y la ordenada al origen de una recta, en muchos casos resulta conveniente seguir estos pasos para graficarla:

Ejemplo 1: Vamos a hacer el gráfico de la función $y = \frac{2}{3}x - 1$

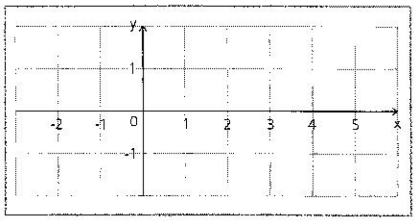
1.er paso: Como la ordenada al origen es –1, la recta cortará el eje y en el punto (0; –1). Marcamos ese punto.



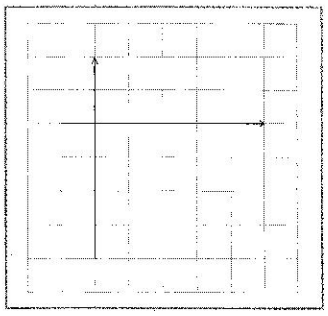
2.do paso: Como la pendiente es $\frac{2}{3}$, significa que por cada 3 unidades que aumenta x, la variable y aumenta 2 unidades; entonces, desde el punto que marcamos antes, avanzamos 3 unidades en el sentido positivo de las x y 2 unidades en el sentido positivo de las y. Allí marcamos otro punto.



3.er paso: Trazamos la recta que pasa por los dos puntos que marcamos.



Ejemplo 2: Siguiendo los pasos descriptos, construyan el gráfico de la función $y = -\frac{3}{4}x + 1$ teniendo en cuenta que, como la pendiente es ...., significa que por cada .... unidades que .... x, la variable y **disminuye** .... unidades.



Practiquen

10. Despejen y e indiquen si las fórmulas que obtuvieron corresponden a funciones lineales:
    a) $2x - 6y = 1$ b) $\sqrt{x} = y + 1$ c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$
11. Despejen y, indiquen la pendiente y la ordenada al origen de cada recta y grafiquen:
    a) $3x + y = 5$ b) $2x - 3y = 6$ c) $-2y = x$
    d) $y = \frac{x + y}{2}$ e) $4x + 2y - 7 = 0$ f) $4 - y = 0$
12. a) Grafiquen las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:
    A = (–1; 4) y B = (3; 2)
    T = (2; 5) y R = (–2; –1)
    M = (2; 5) y F = (–1; 5)
    b) Indiquen la pendiente y la ordenada al origen de cada una.

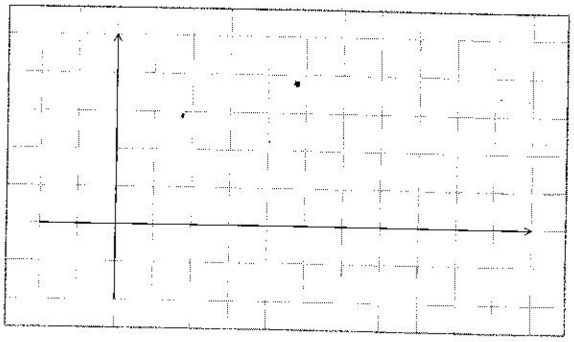
Rectas paralelas y rectas perpendiculares

La pendiente de una recta indica su inclinación con respecto a los ejes cartesianos.

Entonces, si la inclinación de dos rectas con respecto a los ejes cartesianos es la misma, podemos afirmar que sus pendientes son ....

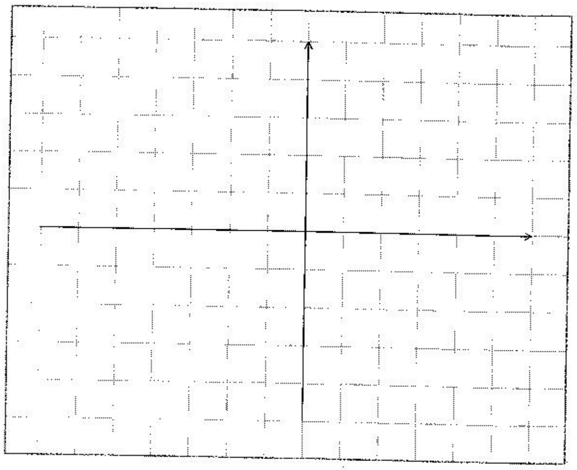
Grafiquen la función $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. En el mismo sistema cartesiano, grafiquen dos funciones lineales que tengan la misma pendiente que f y cuyas ordenadas al origen sean **0** y **–2**, respectivamente.

¿Cómo son las rectas que graficaron? ....



Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.

- Grafiquen con mucha precisión las funciones $g(x) = 3x + 1$ y $h(x) = -\frac{1}{3}x - 2$ en el mismo sistema cartesiano, tomando igual escala en ambos ejes.
- Calculen el producto de las pendientes de g y h: ....
- Las dos rectas determinan cuatro ángulos cuyas amplitudes miden .... Por lo tanto, las rectas son ....



Esta propiedad se cumple para cualquier par de rectas, siempre que el producto de sus pendientes sea igual a –1.

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a –1.
Nota: La ecuación de una recta que es perpendicular al eje x y que lo corta el punto $(a; 0)$ es $x = a$. Estas rectas no tienen pendiente.

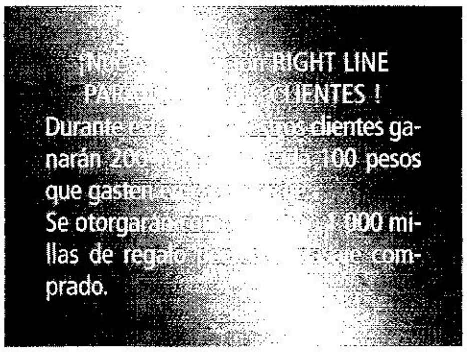
ractiquen

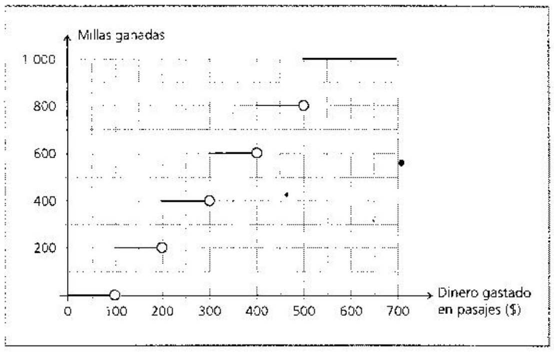
13. Una ecuación de la recta R es: $-3y + 6 = x$
    I) Escriban la fórmula de una función lineal cuya representación gráfica sea:
    a) una recta A, paralela a R, que pase por el punto $(3; -2)$;
    b) una recta que no sea paralela a R y que tenga la misma ordenada al origen que R;
    c) una recta B, paralela a R, que pase por el origen de coordenadas;
    d) una recta C, paralela al eje x, que tenga la misma ordenada al origen que R.
    II) Grafiquen las rectas R, A, B y C en un mismo sistema de ejes cartesianos.

14. Una ecuación de la recta T es: $6 - 3y = 4x$
    I) Escriban la fórmula de una función lineal cuya representación gráfica sea:
    a) una recta M, perpendicular a T, que pase por el punto $(4; 2)$;
    b) una recta Q, paralela a M, que corte el eje x en $x = 5$;
    c) una recta H no perpendicular ni paralela a T, pero que tenga la misma ordenada al origen que T.
    II) ¿Es verdad que la recta G que pasa por los puntos $(-2; 36)$ y $(2; 39)$ es perpendicular a la recta T? Justifiquen.
    III) Grafiquen las rectas T, M y Q en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Función escalonada

Supongamos ahora que la empresa Right Line que mencionamos en la página 48 modifica así su promoción:





Para agilizar los trámites, cada uno de los vendedores de la compañía tiene un gráfico de la función **f**, co
éste, en su escritorio. A las funciones de este tipo, que presentan saltos con forma de escalones, se las lla
funciones escalonadas.

- ¿Cuántas millas gana, con esta promoción, un cliente que compra un pasaje Buenos Aires-Bariloche que cu
ta $ 250? ....
- Si un cliente obtuvo 800 millas con esta promoción, podemos asegurar que el pasaje que compró costó .....
o más, pero menos que ....
- ¿Qué significado pueden atribuir a los agujeritos de los extremos derechos de cada segmento del gráfico
....
- Completen: Si $x \in [300; 400) \Rightarrow f(x) = ...$
Si $x \in [0; 100) \Rightarrow f(x) = ...$
Si $x \in [.......; ....) \Rightarrow f(x) = 1\,000$

Practiquen

15. En una ciudad cuya unidad monetaria está representada por ϕ, las tarifas telefónicas de las llamadas interurbanas se cobran ϕ 0,70 por el primer minuto y ϕ 0,40 por cada minuto adicional o fracción (por ejemplo, si la persona habla 45 seg, se computa 1 min). Representen gráficamente el costo de la llamada en función del tiempo (medido en minutos).
16. En los días sábado y domingo, las tarifas señaladas en el problema anterior se reducen al 50% de su valor para el primer minuto y al 30% de su valor para cada minuto adicional o fracción.
a) Representen gráficamente esta nueva situación.
b) ¿Cuánto deberá pagar una persona por una llamada telefónica de 2,5 min realizada en un día sábado?
17. Consideren que x es un número real cualquiera perteneciente al intervalo $(-3; 4)$ y que existen enteros consecutivos n y $n+1$, tales que $n \leq x < n+1$, es decir que n es el mayor entero que no supera a x. Grafiquen la función que a cada x le haga corresponder ese n.
18. El prospecto de un medicamento indica:
"La dosis se adaptará según el criterio médico y se cuadro clínico del paciente.
Como posología media de orientación se aconse rir, cada 12 horas, según esta tabla:
Niños de 6 meses a 5 años: 5 ml
Niños de 6 a 12 años: 10 ml
Niños mayores de 12 años y adultos: 20 ml"
Representen gráficamente la relación planteada entre la edad del paciente y la cantidad de mililitros de este medicamento que debe ingerir.

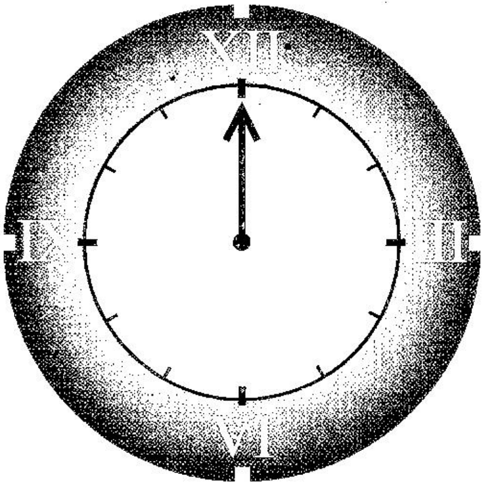
Función periódica con tramos lineales

En la figura podemos observar la posición del segundero de un reloj. Denominamos **posición inicial Q** a la que señala la aguja, y ℓ a la longitud de la circunferencia borde, coloreada con rojo.

A cada instante que transcurre a partir de la posición inicial (tiempo 0) le asignaremos la longitud del menor arco de circunferencia que hay entre Q y el extremo del segundero.

Completen la tabla:

[illegible]	[illegible]
15 seg	$\frac{\ell}{4}$
30 seg	
45 seg	
1 min	0
2 min 45 seg	
3 min	



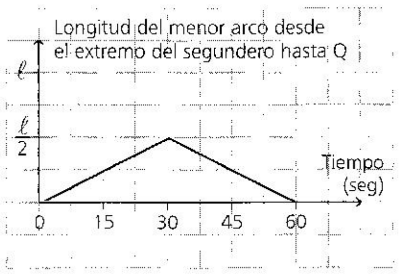
Observen el gráfico de la función correspondiente a los primeros 60 segundos.

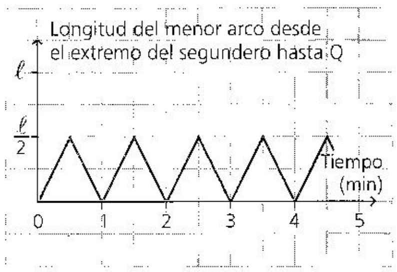
Como el proceso se repite cíclicamente cada minuto, el gráfico de esta función se construye repitiendo el que dibujamos para los primeros 60 segundos.

A este tipo de funciones las llamamos **funciones periódicas con tramos lineales**.

En nuestro ejemplo, el ***período*** es de 1 min.

Si llamamos **f** a la función que graficamos y **t** al tiempo en minutos, para $t \geq 0$, se cumple que: $f(t) = f(\underbrace{t + 1}_{\text{Período}})$





Practiquen

19. En una pared se graficó una recta numerada. Sobre ella se efectúan disparos. Los que dan sobre la recta dejan sólo una marca. Se toma la distancia entre cada marca y el entero más próximo. Si la marca está a igual distancia de dos enteros consecutivos, se toma 0,5. Representen gráficamente la función *d* que asigna a cada punto de la recta dicha distancia.

    Ejemplos: $d(3{,}2) = 0{,}2$ $\quad d(1{,}7) = 0{,}3$
    $d(0{,}5) = 0{,}5$ $\quad d(-1{,}9) = 0{,}1$
    $d(-2{,}4) = 0{,}4$ $\quad d(3) = 0$

20. Dibujen una función periódica definida por tramos lineales que pase por los puntos (2; 0), (4; 0) y (6; 0).

21. Consideren la función que a cada número real ***x*** le hace corresponder la diferencia entre ***x*** y el mayor entero que no supera a ***x***.

    Por ejemplo: $f(7{,}8) = 7{,}8 - 7 = 0{,}8$
    $f(-1{,}3) = -1{,}3 - (-2) = 0{,}7$
    $f(5) = 5 - 5 = 0$

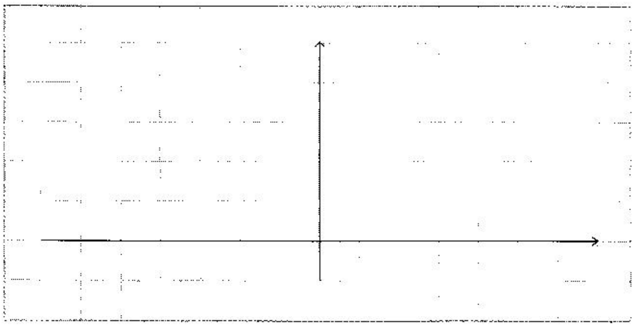
    Grafiquen la función, indiquen el período, las intersecciones con los ejes y el conjunto imagen.

Función valor absoluto o módulo

Recordemos que el **valor absoluto** o **módulo** de un número real cualquiera x, que simbolizamos $|x|$, es **la distancia entre x y cero** en la recta numérica. Como es una distancia, el valor absoluto nunca puede ser negativo, es decir que: $|x| \geq 0$.

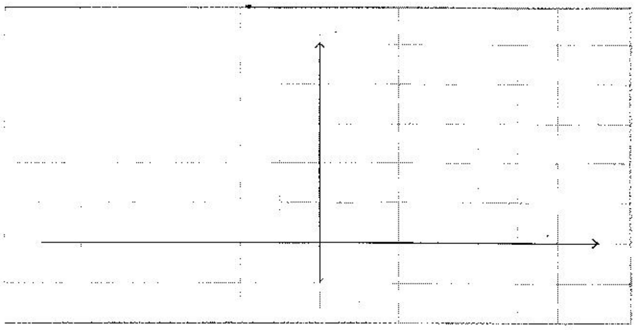
Representen en los sistemas cartesianos la relación entre:

a) un número real negativo y su correspondiente valor absoluto.



Si x < 0, entonces: y = $|x|$ = ...

b) un número real no negativo y su correspondiente valor absoluto.

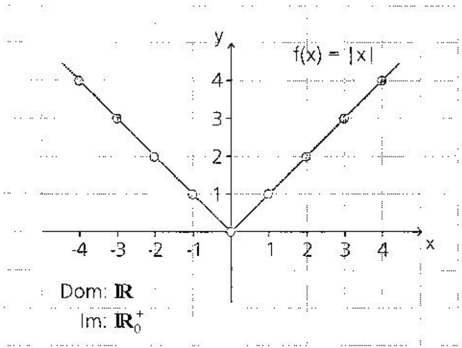


Si x ≥ 0, entonces: y = $|x|$ = ...

• La relación que asigna a cada número real su correspondiente valor absoluto es función.

Si consideramos la **función valor absoluto** *para todos los números reales*, podemos escribir su fórmula así:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



El gráfico tiene un eje de simetría vertical.

Practiquen

22. a) Grafiquen las siguientes funciones en un mismo sistema cartesiano:
$f(x) = |x|$ $g(x) = |3x|$ $h(x) = |\frac{1}{2}x|$
b) Observen los gráficos que realizaron en el punto a) e interpreten cómo incide la constante k de la fórmula:
$f(x) = |k \cdot x|$

23. a) Representen en un mismo sistema cartesiano las siguientes funciones:
$j(x) = |x|$ $k(x) = |x| + 1$ $l(x) = |x| - 2$
b) Observen los gráficos que hicieron en el punto a) e interpreten cómo incide la constante c de la fórmula:
$f(x) = |x| + c$

24. a) Realicen en un mismo sistema cartesiano las representaciones gráficas de:
$m(x) = |x|$ $n(x) = |x - 3|$ $p(x) = |x + 1|$
b) Observen los gráficos que realizaron en el punto a) e interpreten cómo incide la constante a de la fórmula:
$f(x) = |x - a|$

25. Indiquen el conjunto imagen, los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de cada una de las siguientes funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}$:
a) $y = -|x|$ b) $y = |-2x|$
c) $y = 3|x| - 1$ d) $y = |x - 2|$