Instituto de Enseñanza Superior Simón Bolívar

Profesorado de Educación Secundaria en Matemática

ELEMENTOS DE LA ARITMÉTICA Y DEL ÁLGEBRA

Elementos de la Aritmética y del Álgebra es una asignatura o espacio curricular que se desarrolla en 6 (seis) horas de clase presenciales. En ellas abordaremos temas que son pilares para el estudio de los contenidos de los espacios disciplinares que se desarrollaran posteriormente en la carrera.

Dentro de los contenidos de esta asignatura podemos diferenciar aquellos que son una revisión de temas ya estudiados en el Nivel Secundario y otros que son contenidos básicos en la construcción de la Matemática que abordaremos en el Profesorado.

Durante el desarrollo del curso, en primer lugar, revisaremos los distintos conjuntos numéricos existentes y las razones que históricamente hicieron necesaria su creación; luego estudiaremos una herramienta fundamental para poder comunicarnos en Matemática: La Lógica Proposicional. Esta herramienta resulta imprescindible para expresar el pensamiento matemático sin dejar lugar a dobles interpretaciones, esto es, las definiciones, demostraciones de teoremas y propiedades.

Finalmente, es importante mencionar los contenidos que estudiaremos este año y serán retomados y profundizados en años posteriores, entres ellos podemos nombrar a la Teoría de Conjuntos, las Relaciones entre conjuntos y las Relaciones Funcionales.

Los principales objetivos que nos proponemos lograr al finalizar el año son:

- Utilizar correctamente el lenguaje matemático.
- Traducir del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.
- Realizar demostraciones elementales de las propiedades estudiadas.
- Comprender los contenidos principales desarrollados en la asignatura.
- Leer de manera comprensiva textos matemáticos.
- Trabajar en equipo y elaborar conclusiones de manera participativa.

Para empezar la tarea, trabajaremos con textos especialmente seleccionados que persiguen el objetivo de comenzar a vincularnos con el lenguaje matemático, su historia y algunos pensadores que tuvieron fundamental importancia en su desarrollo. El primero de ellos, aparece a continuación, aborda el tema de “Los Conjuntos Numéricos”.

Los Conjuntos Numéricos

Lee el siguiente texto para responder las preguntas que se formulan al final:

En el transcurso de la historia, los números surgieron naturalmente para contar (números cardinales: uno, dos, tres, etcétera) y, a la vez, para ordenar (números ordinales: primero, segundo, tercero, etcétera). Por este motivo, el primer conjunto de números que aparece es el de los números *naturales*. Es razonable comenzar cualquier estudio de los números con ellos, porque los números naturales están en la base de todos los otros conjuntos. Sin embargo, con el tiempo aparecieron nuevos usos para los números y, con los usos, nuevos números.

Los números naturales se pueden sumar y multiplicar. Y, a veces, se pueden restar. Sin embargo, no se puede restar a un número natural otro mayor, porque el resultado ya no es un número natural. Es así como, para poder restar, se necesitan el cero y los números negativos. A la humanidad le tomó siglos aceptar estos nuevos números, pese a que pasan a tener un sentido muy concreto cuando se los usa, por ejemplo, para expresar deudas. Hoy en día, los números negativos son de uso cotidiano. Los naturales dan lugar así a los *enteros*. Con los enteros se puede multiplicar, sumar y restar.

Con los enteros también se pueden hacer divisiones, siempre que se acepte que las divisiones pueden tener resto. Dado un número natural n, si se divide un entero cualquiera por él, el resto será un número entero entre 0 y n-1.

Sin embargo, los números enteros no permiten divisiones si no se está dispuesto a tener resto. Si trabajamos en geometría, incluso si se adoptan unidades de medida tales que las cantidades a medir sean enteras, poco se podrá hacer si no se utilizan fracciones, es decir sin introducir los números *racionales*. Por ejemplo, el Teorema de Tales habla de las longitudes proporcionales, que inmediatamente dan lugar a las fracciones.

Pero pronto se ve que si se quiere medir distancias, tampoco alcanza con números racionales. Por el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 metro, mide $\sqrt{2}$ metros. Y este número, no es racional. Hacen falta entonces los números *reales.*

Y, a veces, tampoco alcanza con los enteros, los racionales o los reales. Por ejemplo, la ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución en los números reales. Los números *complejos* se introdujeron, precisamente, para resolver este tipo de ecuaciones, aunque fueron mirados con mucha desconfianza durante tres siglos. Hizo falta que matemáticos de la talla de Leonhard Euler y Carl Friedrich Gauss los usaran para que la comunidad científica dejara de lado los prejuicios. Hoy en día, no solo se usan para resolver este tipo de ecuaciones. Las ecuaciones de James Clerk Maxwell, por ejemplo, que explican los campos electromagnéticos, precisan de los números complejos.

Si bien las nociones de números enteros, racionales o reales eran saber popular en el siglo XVII, cuando Isaac Newton y Gottfried Leibniz introdujeron el cálculo infinitesimal, las fuertes críticas que recibió esta teoría, por el obispo George Berkeley en el siglo XVIII, entre otros, obligaron a sentar bases precisas para todos estos conjuntos numéricos. Esta fue una empresa de grandes dimensiones: los reales de definieron a partir de los racionales, y éstos a partir de los enteros, que a su vez surgen de los naturales. ¿Y los naturales? La noción de número natural es tan . . . ¡natural! . . . que es sumamente difícil definirlos de manera formal y sin utilizar otros conjuntos anteriores. Fue finalmente Giuseppe Peano quien en 1889 los introdujo axiomáticamente en su libro *Arithmetices principia*, *nova método exposita*.

Una vez definidos los naturales, la definición de los enteros y los racionales es sencilla. Los reales, en cambio, son materia mucho más delicada. Hay distintas definiciones posibles de los números reales, con distintos grados de formalidad.

Si se cuenta con los reales, los números complejos se pueden presentar algebraicamente, como sumas $a+bi$, donde a y b son números reales e i , una solución de la ecuación $x^2+1=0$. Esta es la forma en que los presentó William Rowan Hamilton en la primera mitad del siglo XIX, trescientos años después de que Gerolamo Cardano y Lodovico Ferrari los utilizaran por primera vez, y esta es la forma en que los conocemos hoy.

Los conjuntos de números que se usan hoy en día no se reducen a los que presentamos aquí: naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Dependiendo del problema que se intente resolver, se utilizan otros. Como por ejemplo: los *cuaterniones* (introducidos por Hamilton en 1843, que se utilizan para describir de manera algebraica movimientos del espacio, como rotaciones, traslaciones u homotecias) y los *surreales* (introducidos por John Conway y Donald Knuth en 1974, que se utilizan en teoría de juegos). No obstante estos conjuntos se utilizan en medida mucho menor, y los que presentamos bastan para la gran mayoría de las aplicaciones.

Actividades:

1) Sintetice (en no más de cinco renglones) la idea general contenida en el texto.
2) Investigue quiénes fueron y cuáles fueron los aportes a la Matemática, de las personas nombradas en el texto.

3) Explique la frase “dado un número natural *n*, si se divide un entero cualquiera por él, el resto será un número entero entre 0 y *n*-1”.
4) Enuncie el Teorema de Pitágoras y realice un esquema.
5) ¿Por qué la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 metro, mide $\sqrt{2}$ metros? ¿Por qué este número no es racional?
6) ¿Qué expresa el teorema de Thales? Realice un esquema.
7) ¿Por qué la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en los números reales?
8) Realiza un diagrama que contenga desde los números naturales hasta los números complejos. Indica en cada uno de ellos algunos elementos.

BIBLIOGRAFÍA

Graña, M; Jerónimo, G; Pacetti, A; Jancsa, A; Petrovich, A. (2009). Los Números. De los Naturales a los Complejos. Colección Las Ciencias Naturales y la Matemática. Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica. 1° Edición. Buenos Aires.

El Perturbador Número Irracional

Lee detenidamente para luego responder a las preguntas formuladas:

Un descubrimiento perturbador fue el del número que denominamos "número irracional". La característica de este número es que independientemente de todo se mantiene obstinadamente sin fin. Este rasgo irritante surge a menudo en lo que denominamos una raíz cuadrada, la cantidad que cuando se multiplica por ella misma, da el número dado. La raíz cuadrada de 4, escrita en símbolos $\sqrt{4}$, es un magnífico 2; la $\sqrt{9}$ es 3. Pero hay raíces irracionales, que se transforman en una expresión decimal con una serie sin fin de dígitos que no se repiten a partir de la coma decimal. Por ejemplo: $\sqrt{2}$ es 1,41421...... y así infinitamente; $\sqrt[3]{5}$ es 1,709975 ......hasta el infinito. Lo más perturbador es que las raíces irracionales son muy frecuentes.

También la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es un número irracional 3,14159........ que denominamos "pi" y simbolizamos π . Se cree que la primera letra de la palabra griega *peripheria,* que significa periferia, inspiró el símbolo. La cantidad que representa ha sido calculada con más de cien mil decimales, y sabemos que nunca resultará exacta.

Actividades:

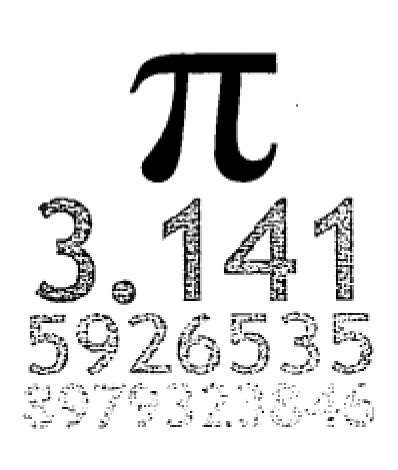
1. Subraye las líneas del texto donde están las ideas que a tu juicio son las más importantes.
2. Explique lo que quiere decir la frase *"La característica de este número es que independientemente de todos se mantiene obstinadamente sin fin"*.
3. ¿Por qué cree que el autor dice que es "un rasgo irritante"?
4. En una parte del texto hay una definición de raíz cuadrada; copie dicha definición.
5. ¿Qué quiere decir el párrafo: "una raíz cuadrada irracional se transforma en una expresión decimal con una serie sin fin de dígitos que no se repiten a partir de la coma"?
6. Escriba seis ejemplos de raíces irracionales.
7. ¿Cuántos números irracionales conoce? ¿Los puede contar?
8. De su opinión sobre la última parte del texto: "La cantidad que representa ha sido calculada con más de cien mil decimales, y sabemos que nunca resultará exacta".

Bibliografía:

El comentario de Textos Matemáticos. Una experiencia de aprendizajes significativos. Ma. Dolores De Prada Vicente, Ignacio Martínez Perdiguero, José Alcalde García. Editorial Agora. Málaga. 1990.

Poemas dedicados a π(pi)

Manuel Golmayo



Pi, o el gran enigma circular

Soy y seré a todos definible

mi nombre tengo que daros

cociente diametral siempre inmedible

soy de los redondos aros.

Actividades

1) Investiga la biografía de Manuel Golmayo.
2) Contar las letras de cada una de las palabras de este poema, escribir los números obtenidos en forma sucesiva y constatar con qué famoso número coinciden.
3) ¿Cuántas cifras decimales correctas encontraron? Verificar con la calculadora.
4) ¿Cuántas cifras decimales tiene la aproximación de π que se obtiene del poema y cuántas tiene el número π? Investiga en la historia de la matemática el número π.
5) ¿Es el mismo número para los distintos pueblos?
6) ¿π, es un número racional? Justifica. ¿Cuál es el conjunto de números que incluye a los racionales y a los que son de la familia de π?
7) ¿Por qué el autor lo define como "cociente diametral siempre inmedible"?
8) ¿A qué figura geométrica se refiere al decir "los redondos aros"?
9) Menciona los usos de este número π.

Bibliografía:

Literatura en la clase de matemática. Irene Zapico. Silvia Tajeyan. Editorial Lugar. Buenos Aires. 2014.

¿Qué es el Infinito?

-Bueno Clara, esto no es fácil de contestar porque es difícil saberlo. Los seres humanos llevan siglos pensándolo. Muchas personas brillantes dedicaron a este tema buena parte de su vida, y aun así, todavía queda mucho por conocer.

-¿Pero entonces, nunca vamos a entenderlo?

-No lo sé – contestó el Maestro, algo ruborizado porque no podía satisfacer la curiosidad de la niña, que siempre la hacía muchas preguntas, y generalmente se quedaba muy contenta con sus respuestas-. Pero quizás te pueda contar algunas cosas que van a gustarte.

- ¡Qué suerte! Pensé que me estaba diciendo que no valía la pena pensar en el infinito, que no podíamos comprenderlo.

-En verdad, quizá no podamos entenderlo bien. Pero ¿acaso alguien en este mundo comprende algo totalmente? A veces creemos que comprendemos algo porque ya oímos hablar sobre ese tema, o podemos decir algo sobre él o, a lo sumo, nos acostumbramos a eso. Y así, nos quedamos tranquilos, creyendo que lo entendemos, aunque en realidad no sea tan así. De cualquier modo, creo que sería muy bueno que escucharas lo que te quiero contar sobre el infinito. Te aseguro que podríamos aprender cosas muy interesantes.

Clara se quedó mirando al Maestro con curiosidad sobre esta nueva lección y con grandes expectativas. Ya había tenido muchas lecciones durante éste, su primer año en el colegio secundario, y le habían gustado.

El maestro comenzó:

-Pensá en algunos conjuntos que ya conocemos, como por ejemplo, en $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales; en $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros; $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales; o $\mathbb{R}$, los números reales. Acordate que podemos escribir estos conjuntos así:

$\mathbb{N} = \{\, 1,2,3,4,5,6 \ldots\ldots \}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{n} \neq 0\right\}$

No es fácil describir al conjunto $\mathbb{R}$, pero sabemos que consta de los números racionales y los irracionales. Estos últimos son los que tienen una expresión decimal que no termina nunca, ni es periódica. Pero no nos preocupemos por eso ahora.

¿Esos conjuntos tienen algo en común? ¿Qué opinas?

-No estoy segura. ¿Será que son todos conjuntos de números? - preguntó la niña, transformando su inseguro tono de voz al comienzo en una alegre sonrisa, al ir descubriendo que estaba en lo cierto.

-Sí, así es Clara. Ahora decime algo acerca de la cantidad de elementos de estos conjuntos.

-Perdón. ¿Qué quiere decir con eso, Maestro?

-Es sencillo. Por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, 3\}$ tiene tres elementos, el 1, el 2 y el 3, nada más. El conjunto $\{-1,\ 0,\ 1\}$ también tiene tres elementos. El conjunto formado por los meses de un año tiene 12 elementos. Esto es simple. Ahora pensemos en el conjunto de los números naturales que denotamos con $\mathbb{N}$, o lo que es lo mismo, el conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$. Fijate que los puntos suspensivos indican que los números siguen, y lo hacen indefinidamente. Ahora te hago una pregunta: ¿Cuántos elementos tiene $\mathbb{N}$? O lo mismo, ¿cuántos números naturales hay?

-Me acuerdo que una vez aprendimos que no hay un número que sea mayor que todos los demás.

-Así es, Clara. Si propones un número natural ***M*** muy grande como el mayor de todos, por más grande que sea ***M***, ocurre que el siguiente, o sea ***M+1***, es otro número natural, obviamente, mayor que ***M***. Por consiguiente no existe un número natural, que sea el mayor de todos.

-Fue exactamente así que me mostró que los números no se terminaban nunca!

-Bien, si no se terminan, entonces, ¿cuántos hay?

-¿Infinitos?

-¡Por supuesto! Hay infinitos números naturales. También podemos expresar esto mismo diciendo que “el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito”.

-Esta última frase me resulta un poco más difícil, Maestro, pero no importa.

-No es difícil, Clara, te acostumbrarás. Solamente estamos diciendo que si un conjunto tiene infinitos elementos, entonces lo llamaremos *conjunto infinito*, y además, antes hemos asumido que si un conjunto tiene mayor cantidad de elementos que *M*, para todo número natural M, entonces tiene infinitos elementos.

-Creo que lo estoy entendiendo.

-Bien. Sigamos que ahora comienza lo más interesante:

¿Cómo son los conjuntos que mencionamos recién $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$? Me refiero a la cantidad de elementos que tienen.

-Bueno….(Clara pensaba muy concentrada)….. $\mathbb{Z}$ es más grande que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ también… y $\mathbb{R}$ más grande aún. Aunque no conozco tan bien al conjunto $\mathbb{R}$ como los otros.

-Está bien Clara, pero quiero que me digas cuántos elementos tienen. ¿Son conjuntos finitos o infinitos?

-¡Son conjuntos infinitos! - contestó Clara contenta.

-Correcto. Ahora me gustaría ver si podemos contar mejor cuántos elementos hay en cada uno de estos conjuntos. Me refiero a algo más profundo e importante que simplemente decir si es infinito o no. ¿Podrías ayudarme?

Ella se quedó pensando un rato antes de contestar. Estaba un poco sorprendida por esto de "contar cantidad de elementos" de un conjunto infinito. Ya el infinito le parecía algo raro, y ahora esto era más raro aún. Luego dijo:

-Maestro, si estos conjuntos son infinitos, entonces no hay nada más para contar en ellos….¡¿ o sí?!

El rostro de la niña cambió súbitamente al pronunciar estas palabras. Siempre había pensado que al tratarse de algo *infinito* no había más nada que contar, es decir, la respuesta *infinito* le parecía más que suficiente. Pero confiaba en el Maestro, y entonces, al ver que él indagaba más profundamente sobre esto, por primera vez en su vida pensó que podían existir "distintos infinitos". ¿Sería posible? Aunque no lo comprendía bien, esto la estremeció. Por unos instantes sintió un tironeo entre su curiosidad y entusiasmo, que la invitaban a continuar, y sus intenciones de no complicarse que le decían que se olvidara del infinito. En medio de estos pensamientos, oyó que el Maestro continuaba:

-Clara, ésta es, justamente, una de las cuestiones interesantes que quiero que pensemos juntos. Tendremos que dilucidar, por ejemplo, si por ser dos conjuntos infinitos tienen la misma cantidad de elementos o no. ¿Me acompañarás en esta aventura por el infinito?

Clara pensó un momento más. ¿Se podría realmente responder bien estas preguntas? ¿Sería ella capaz de hacerlo? Su entusiasmo e inquietud vencieron cualquier duda o pereza mental, y respondió:

-Sí, Maestro.   ¡Me gustaría explorar el infinito! He escuchado hablar otras veces sobre el infinito y pienso que el tema le interesa a mucha gente, ¿verdad?. Pero nunca he sabido ni siquiera por dónde empezar a pensar si escucho la palabra *infinito*. Siento que allí se acaba todo.

-Así suele suceder Clara. Parece mentira, pero justamente al hablar de infinitos, se nos suele terminar todo porque no sabemos cómo continuar, no imaginamos qué más se puede analizar. ¡Me alegro mucho que hayas decidido acompañarme! En este mismo momento podemos plantearnos una pregunta concreta muy interesante: ¿Es la cantidad de elementos de $\mathbb{Z}$ mayor que la de $\mathbb{N}$? No creas que es una pregunta fácil, al contrario. Es algo que tendremos que pensar basta ante para responder, incluso tenemos que ponernos de acuerdo en algunas cosas básicas desde donde partir.

- Mmhhh…. – Clara ya se había puesto a pensar. Vacilaba, hasta que dijo- No sé, me confundo un poco. Primero pienso que $\mathbb{N}$ es más pequeño que $\mathbb{Z}$. Pero después pienso que los dos son infinitos, y entonces deben tener la misma cantidad de elementos.

-Ajá- dijo el Maestro, sin decirle si estaba en lo cierto o no-. Dijiste cosas interesantes, aunque debemos elaborarlas mejor. Precisamente a este punto quería llegar. Aunque pueda parecer contradictorio, si lo analizamos desde un punto de vista es verdad que $\mathbb{Z}$ tiene todos los elementos de $\mathbb{N}$ y otros más, es decir $\mathbb{Z}$ contiene propiamente a $\mathbb{N}$**.** Sin embargo si lo miramos desde otro punto de vista, también va a ser verdadero que ambos tienen infinitos elementos.

-Realmente me intriga saber bien cómo es- dijo Clara- . Y hay una cosa que no entiendo. Usted me dijo una vez que el todo es mayor que la parte, o algo parecido. ¿Con $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ cómo sería? ¿No hay contradicción?

-Como sabemos, $\mathbb{Z}$ es el conjunto de todos los números enteros, en este caso es el todo, y $\mathbb{N}$ es la parte, pues existe una correspondencia entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$. Pero fíjate, Clara, que no decimos que sean iguales, sino que *la cantidad de elementos que tienen uno y otro es la misma.*

-Entonces, ¿me está diciendo que hay conjuntos infinitos*, pero uno es parte de otro?*

-¡Sí, Clara! ¡Es asombroso! Sucede que estamos acostumbrados a contar conjuntos finitos, y eso nunca podría suceder entre ellos. Pues si un conjunto finito A contiene a otro conjunto finito B, y además A es distinto de B, entonces sabemos que la cantidad de elementos de A es mayor que la de B. Pero tratándose de conjuntos infinitos, esto no es así.

Como ya dijimos entre dos conjuntos infinitos, puede suceder que uno de ellos esté contenido propiamente en el otro.

Actividades:

-1.-Explique brevemente (en aproximadamente 5 renglones) lo que dice el texto.

-2.-Busque en el diccionario las palabras desconocidas y escriba sinónimos de cada una de ellas.

-3.-Escriba tres preguntas que Ud. le haría al profesor para comprender mejor el texto.

-4.-¿Para qué sirven los números?

-5.-Escriba al menos 5 números e indique para qué los podría usar.

-6.-Ubique los números anteriores en los conjuntos numéricos mencionados en el texto.

-7.-¿Es lo mismo escribir $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots.\}$, que como está escrito en el texto? ¿Sería lo mismo separar los elementos con puntos y comas o con puntos?

-8.-¿Qué significa el símbolo " = " tal como se lo utiliza en el texto?

-9.-¿Por qué en $\mathbb{Z}$ aparecen puntos antes y después de los números?

-10.-Escriba con palabras lo que expresa $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathcal{Z}, n \neq 0\right\}$

-11.-¿Por qué no podemos escribir $\mathbb{Q}$ por enumeración?

-12.-¿Qué otros conjuntos numéricos conoce?

-13.-Escriba lo que entiende por "los irracionales son los que tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos"

-14.-¿Por qué el Maestro dice que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$, a pesar de tener la misma cantidad de elementos, no son iguales?

BIBLIOGRAFÍA

Cagliero, L; Penazzi, D; Rosstti, J P; Sustar, A; Tirao, P. (2010). Aventuras Matemáicas. Colección Las Ciencias Naturales y la Matemática. Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica. 1° Edición. Buenos Aires.