Instituto de Enseñanza Superior Simón Bolívar

Profesorado para la Educación Secundaria en Matemática

<u>Profesores</u>: Olga Peñaloza y Víctor Palazzesi.

<u>Espacio Curricular</u>: Elementos de la Aritmética y el Álgebra.

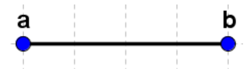
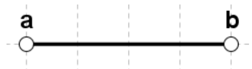
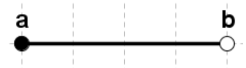
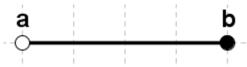
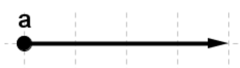
Clase 4:

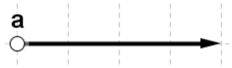
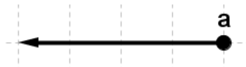
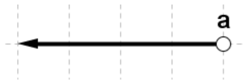
Intervalos

Otra manera de representar en símbolos conjuntos de **números reales** definidos por desigualdades es utilizando la notación de **intervalos**. Los mismos se presentan con mucha frecuencia en el cálculo y corresponden geométricamente a segmentos lineales. Esta notación es una forma más sencilla de representar subconjuntos de la recta numérica.

Se utilizan paréntesis para indicar que un extremo no pertenece (ese número no pertenece al intervalo) y corchetes para indicar que el extremo pertenece (ese número pertenece al intervalo). Por ejemplo, para $a < b$, en la notación de intervalo el número menor se escribe siempre a la izquierda del mayor:

A continuación se resumen los posibles intervalos que pueden definirse, junto con su notación como conjunto y su representación gráfica en la recta numérica.

Notación de conjunto	Notación de intervalo	Representación gráfica
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$ Intervalo cerrado de a a b.	$[a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$ Intervalo abierto de a a b	(a, b)	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$ Intervalo semiabierto a derecha. Abierto en b.	$[a, b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$ Intervalo semiabierto a izquierda. Abierto en a.	$(a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\}$ Intervalo semicerrado.	$[a, +\infty)$	

Cerrado en a.		
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$ Intervalo semiabierto. Abierto en a.	$(a, +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a\}$ Intervalo semicerrado. Cerrado en a.	$(-\infty, a]$	
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$ Intervalo semiabierto. Abierto en a.	$(-\infty, a)$	

Los símbolos ∞ y $-\infty$ **no representan números**; son símbolos que nos indican que el intervalo no tiene un valor máximo o un valor mínimo. Por lo tanto, siempre se escribe un paréntesis junto al símbolo ∞.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número real se define como la distancia entre dicho número y el 0 en la recta numérica. Se denota escribiendo el número entre barras. Por ejemplo: $|3| = 3$, $|-4| = 4$ y $|0| = 0$.

De esta manera: $\forall a \in \mathbb{R}: \ |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Propiedades del valor absoluto

1) *El valor absoluto de cualquier número real es no negativo*

2) *El valor absoluto de dos números opuestos es el mismo:*

3) *El valor absoluto del producto de dos números reales cualesquiera es igual al producto de los valores absolutos de dichos números:*

4) *El valor absoluto del cociente de dos números reales cualesquiera es igual al cociente de los valores absolutos de dichos números:*

5) *El valor absoluto de la suma de dos números reales cualesquiera es menor o igual que la suma de los valores absolutos de dichos números (desigualdad triangular):*

6) $\forall a, k \in \mathbb{R}: \ |a| \leq k \ \Rightarrow \ -k \leq a \leq k$

7) $\forall a, k \in \mathbb{R}: \ |a| \geq k \ \Rightarrow \ a \leq -k \ \vee \ a \geq k$

Actividad 1

Exprese en lenguaje simbólico las propiedades de valor absoluto de la 1 a la 5, y en lenguaje coloquial la 6 y 7.

Actividad 2

Exprese cada conjunto como intervalos y represéntelos en la recta numérica:

$A = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 3\}$

$B = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq 1\frac{1}{2}\right\}$

$C = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq \sqrt{10}\right\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 1| \leq 5\}$

$E = \left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{2} < x \leq 2 + \sqrt{2}\right\}$

$F = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{2} \leq 3 - |x|\right\}$

$G = \{x \in \mathbb{R} / |3 - x| > 2\}$

Notación científica

Los científicos utilizan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana, además del Sol, Próxima Centauri, está a aproximadamente a 40000000000000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0,00000000000000000000000166 g. Estos números resultan difíciles de escribir y de leer, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica*.

Se dice que un número real positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde} \qquad 1 \leq a < 10 \qquad \text{y} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

De esta manera, la distancia de la Tierra a la estrella Próxima Centauri puede escribirse mediante notación científica de la siguiente manera:

$$40000000000000 = 4 \times 10^{13}$$

Y la masa del átomo de hidrógeno:

$$0{,}00000000000000000000000166 = 1{,}66 \times 10^{-24}$$

Actividad 3

1) Escriba en notación científica el número indicado en cada enunciado:
- **a)** El diámetro de un electrón es alrededor de 0,0000000000004 centímetros.
- **b)** Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.
- **c)** La masa de la Tierra es de unos 5970000000000000000000000000000 mg
- **d)** Tu edad en segundos.

e) La masa de una molécula de oxígeno es de unos 0,0000000000000000000000053 mg.

2) Con la información obtenida en el problema anterior, ¿Cuántas moléculas de oxígeno llenarían el Planeta Tierra?

3) Una sala sellada de un hospital con medidas 5m de ancho, 10m de largo y 3m de alto, está llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000L y 22,4L de cualquier gas contienen $6,02 \times 10^{23}$ moléculas. ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en la sala?

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

A pesar de la definición del conjunto de los números reales, se presentaron a través de la historia cuestiones como hallar la solución de ecuaciones como:

$$x^2 + 1 = 0$$

la cual no tiene solución real, es decir no existe ningún número real cuyo cuadrado aumentado en 1 unidad sea igual a cero.

Por este motivo surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números reales para poder dar solución a este problema y a otros que verá a lo largo de su carrera.

Para comenzar con la construcción de este nuevo conjunto numérico se define a la unidad imaginaria i de la siguiente manera:

$$i^2 = -1$$

A partir de esta definición se construye el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

De esta manera, existe una correspondencia biunívoca entre los números complejos de la forma $z = a + 0i$ y los números reales. Es decir, se cumple que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Este conjunto numérico se estudiará en mayor profundidad en el espacio curricular de Problemática del Álgebra II.

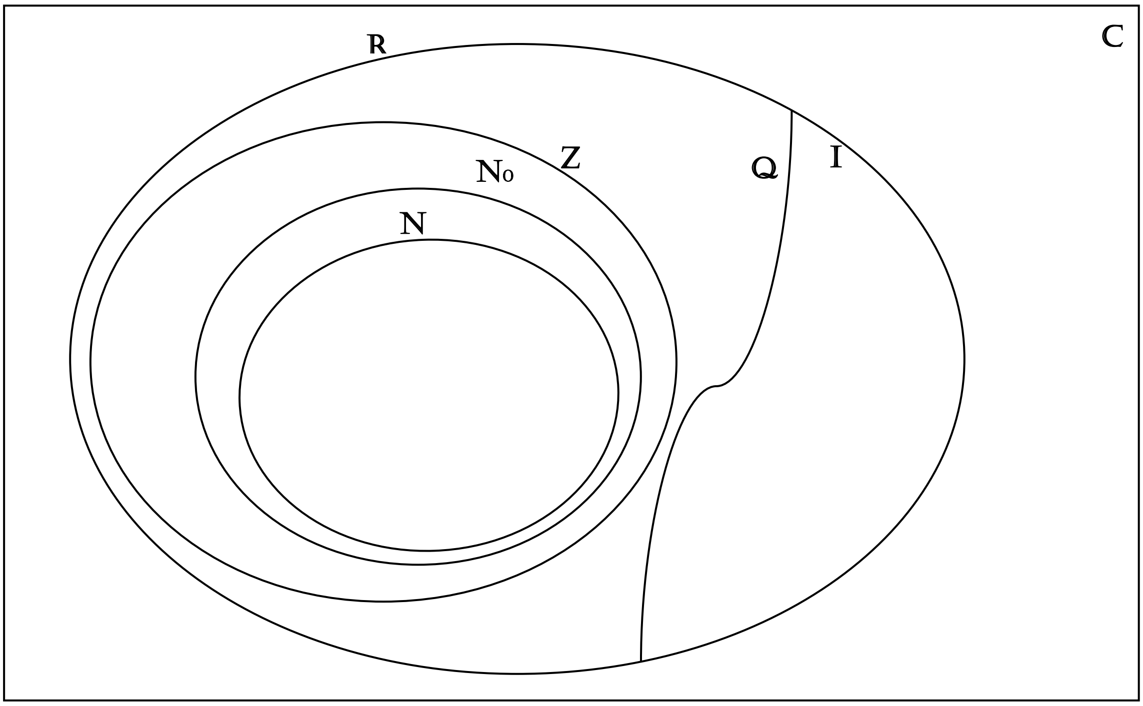
Actividad 4

Resuelva y ubique el resultado en el siguiente diagrama de los conjuntos numéricos:

a) $\sqrt[3]{-27-37} =$ **b)** $\sqrt[3]{(-27):(-8)} =$ **c)** $\sqrt[4]{(-16):(-1)} =$

d) $\sqrt{-81} =$ **e)** $\sqrt{25:16} =$ **f)** $\sqrt{49-36} =$

g) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} =$ **h)** $(6-2\cdot 3)^5 =$ **i)** $\sqrt{10^2-8^2} =$


R
C
Z
N0
Q
I
N