Profesores: Olga Peñaloza y Víctor Palazzesi.

Espacio Curricular: Elementos de la Aritmética y el Álgebra.

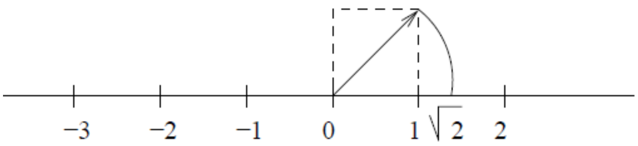
Clase 4:

Si se pudieran marcar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales se advertiría que quedarían aún infinitos números sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos en la recta que no se corresponden con ningún número racional. Dos problemas sencillos: determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a 1, y determinar la longitud de una circunferencia de radio 1, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales. Como se sabe, aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Sin embargo, no existe ningún número racional que cumpla la propiedad de que su cuadrado sea igual a 2. Esto significa, que no es posible medir la longitud de la diagonal con un número entero de *lados*, ni tampoco fraccionando dicho lado en subunidades tan pequeñas como se quisiera. Sin embargo, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama *raíz cuadrada de 2* y se lo denota $\sqrt{2}$. Más aún, $\sqrt{2}$ es comparable con los números racionales, en el sentido que se puede determinar qué números racionales, son menores y cuáles mayores que él.

La siguiente figura muestra la correspondencia entre $\sqrt{2}$ y un punto de la recta numérica: el arco de la circunferencia indica que la medida de la diagonal se corresponde con $\sqrt{2}$.



A continuación se demuestra que $\sqrt{2}$ no es racional:

La demostración arranca suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional y se llegará a una contradicción.

Si es racional, entonces puede expresarse como el cociente de dos números enteros:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ con } p,\ q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0$$

Se puede suponer que el máximo común divisor de p y q es 1, es decir que no tienen otros divisores comunes y $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible.

Elevando al cuadrado ambos miembros y multiplicando por q^2 se obtiene:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = p^2 \ (*)$$

Por lo tanto, p^2 es múltiplo de 2 y esto implica que p es múltiplo de 2 (puede demostrarse ésta afirmación). Es decir, $p = 2k, \ k \in \mathbb{Z}$. Si se reemplaza a p en (*) se obtiene: $(2k)^2 = 2q^2$. Resolviendo y simplificando: $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$, de donde se deduce que q^2 es múltiplo de 2 y por lo tanto q también es múltiplo de 2, lo cual es una contradicción puesto que se había supuesto que p y q no tenían divisores comunes y según este análisis 2 es un divisor común.

Por lo tanto $\sqrt{2}$ no es racional.

Actividad 1

a) ¿Qué propiedades de la adición, multiplicación y potenciación se cumplen en el conjunto de los números irracionales?

b) Previo a esta actividad se ofreció una "demostración" de que $\sqrt{2}$ es irracional. Investigue qué es una demostración en matemática y para qué sirve.

c) ¿Qué otros números irracionales conoce? ¿Cómo puede validar su respuesta?

d) ¿Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los conjuntos numéricos estudiados y el de los irracionales?

Los números irracionales tienen también una representación decimal, y esta expresión decimal es *infinita no periódica*. Por ejemplo, un número cuya parte decimal está formada por infinitos ceros y unos, en el cual el primer 0 está seguido de un 1, el segundo de dos unos, el tercero de tres unos, y así sucesivamente:

$$235{,}1011011101111011111011111101111111011111111 0\ldots$$

Este número representa un número irracional porque no puede identificarse un "periodo" en la parte decimal del mismo. Si bien parecería poco frecuente estos tipos de números, los mismos constituyen, como se dijo, un conjunto infinito.

Algunos de los números irracionales que se utilizan con frecuencia son π: razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro, e: número de Neper y base del logaritmo natural y M: logaritmo en base 10 del número e. Los primeros dígitos decimales de estos números se listan a continuación:

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

$$M = 0,434294481903252...$$

Actividad 2

a) ¿Completan los números irracionales la recta numérica?
b) Investigue sobre la presencia de otros números irracionales en la vida diaria.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales se simboliza con $\mathbb{R}$ y está formado por todos los números que son racionales **o** irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto de los números reales y los puntos de una recta numérica. Es decir, a cada punto de la recta numérica le corresponde un único número real y cada número real se representa por un único punto en la recta numérica. Esta propiedad se conoce con el nombre de **axioma de completitud**.

Además, entre dos números reales cualesquiera existen infinitos números reales, es por esto que $\mathbb{R}$ es un conjunto **denso**.

El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado por la relación "es menor que". Se dice que $\boldsymbol{a}$ **es menor que** $\boldsymbol{b}$ y se escribe $a < b$, si $b - a$ es un número positivo. Desde el punto de vista geométrico, esto quiere decir que a queda a la izquierda de b en la recta numérica. Es equivalente decir que $\boldsymbol{b}$ **es mayor que** $\boldsymbol{a}$ y escribir $b > a$. El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$), quiere decir que $a < b$ o $a = b$ y se lee "a es menor o igual que b"

Actividad 3

Escriba coloquial y simbólicamente todas las propiedades de la adición y la multiplicación en el conjunto de los números reales.

Propiedades de los opuestos aditivos

1) $\forall a \in \mathbb{R} : (-1) \cdot a = -a$
2) $\forall a \in \mathbb{R} : -(-a) = a$
3) $\forall a, b \in \mathbb{R} : (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$
$\qquad = -(a \cdot b)$
4) $\forall a, b \in \mathbb{R} : (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
5) $\forall a, b \in \mathbb{R} : -(a + b) = -a - b$
6) $\forall a, b \in \mathbb{R} : -(a - b) = b - a$

Propiedades de la compatibilidad de la adición y la multiplicación de reales con la relación "<"

1) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:\quad a<b \quad\Rightarrow\quad a+c<b+c$

2) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:\quad a<b \quad\wedge\quad c>0 \quad\Rightarrow\quad a\cdot c<b\cdot c$

3) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:\quad a<b \quad\wedge\quad c<0 \quad\Rightarrow\quad b\cdot c<a\cdot c$

Potenciación y radicación

La potencia de un número real con exponente entero se define de la misma manera que para los números racionales. Las potencias con base no nula y exponente par son siempre positivas, por ejemplo:

$$(-3)^2=9,\quad (-2)^4=16,\quad 3^4=81$$

En particular, cualquier número y su opuesto elevados a un exponente par dan el mismo resultado. Por lo tanto, si se quiere hallar el número que elevado al cuadrado sea igual a 16 se tendrán dos soluciones: 4 y -4. Para distinguir entre ellas, se utilizará una notación diferente para cada una. Esto es se escribirá:

$$+\sqrt{16}=4\,,\qquad -\sqrt{16}=-4\qquad \text{y}\qquad \sqrt{16}=\pm 4$$

En general, para cualquier número real *positivo* a, se define la raíz cuadrada positiva de a como el número real b tal que $b^2=a$, y se lo denotará $b^2=\sqrt{a}$

De manera análoga se define la raíz cuarta positiva, la raíz sexta positiva, y demás raíces con índice par. Así por ejemplo:

$$\sqrt[4]{81}=\pm 3,\quad -\sqrt[6]{64}=-2,\quad \sqrt{100}=\pm 10$$

Por otro lado, las raíces de índice impar están definidas para todos los números reales, y tienen el mismo signo que el radicando. Por lo tanto, no es necesario hacer la distinción entre la raíz positiva y la negativa. Así por ejemplo:

$$\sqrt[3]{64}=4\qquad \text{y}\qquad \sqrt[3]{-64}=-4$$

En símbolos:

- $\forall \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}^+\wedge\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}\wedge\forall n\in\mathbb{Z}^+\wedge n \text{ par: } \sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\pm\frac{r}{s}\quad\Leftrightarrow\quad\left(\pm\frac{r}{s}\right)^n=\frac{p}{q},$
- $\forall \frac{p}{q},\frac{r}{s}\in\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{Z}^+\wedge n \text{ impar: } \sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\frac{r}{s}\quad\Leftrightarrow\quad\left(\frac{r}{s}\right)^n=\frac{p}{q},$

El número n se llama *índice* de la raíz (en la radicación) y *exponente* en la potenciación. $\frac{p}{q}$ es el *radicando* (en la radicación) y la *potencia* (en la potenciación). $\frac{r}{s}$ es la *raíz n-ésima* de $\frac{p}{q}$ (en la radicación) y la *base* (en la potenciación).

Se define a la potencia con exponente fraccionario de la siguiente manera:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ con } a \in \mathbb{R}^+, \quad m, n \in Z$$

Por ejemplo:

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}, \quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} \quad \text{y} \quad 64^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{64}\right)^3}$$

Además, es posible definir la potenciación de un número real positivo con cualquier exponente real, tema que excede a los objetivos de esta guía de estudio.

La potenciación con base real negativa no siempre da como resultado un número real, y sólo se puede dar una definición general en el campo de los números complejos.

Es importante notar que la potenciación y la radicación no son distributivas con respecto a la adición. Por ejemplo: $(3+5)^2 = 64$ y $3^2 + 5^2 = 34$ por lo cual $(3+5)^2 \neq 3^2 + 5^2$.

La siguiente propiedad es conocida como **diferencia de cuadrados**: la diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de éstos números:

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

Esta propiedad surge fácilmente aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en el segundo miembro, y suele ser muy útil a la hora de realizar cálculos.

Así por ejemplo:

$$821^2 - 820^2 = (821+820) \cdot (821-820)$$

Entonces es más sencillo resolver el segundo miembro que calcular la diferencia entre los cuadrados de 821 y 820.

Propiedades de la potenciación

Si $a, b, m \text{ y } n$ son números reales cualesquiera, de manera que las siguientes potencias estén definidas, se cumplen las siguientes propiedades:

1) *Producto de potencias de igual base:* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) *Cociente de potencias de igual base:* $a^m : a^n = a^{m-n}$

3) *Potencia de otra potencia:* $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

4) *Propiedad distributiva de la potenciación respecto a la multiplicación:* $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$

5) *Propiedad distributiva de la potenciación respecto a la división:* $\left(a : b\right)^n = a^n : b^n$

Actividad 5

Demuestre las siguientes propiedades de la radicación

a) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ con $a > 0$ y $n, k \in \mathbb{Z}^+$.

b) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ con $a > 0$ y $n, k \in \mathbb{Z}^+$.

c) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ con $a > 0$ y $n, k, m \in \mathbb{Z}^+$.

Actividad 6

Lea el siguiente texto elaborado por sus profesores:

Radicales
Como no es posible convertir a fracción un número irracional, se trabaja con **radicales**: expresiones formadas por el signo radical y una expresión numérica o literal como radicando y además raíces no exactas.

Analizando radicando e índices:

- Si **n** impar $\Rightarrow$ $\exists$ raíz real única y del mismo signo que el radicando.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[5]{-32} = -2$$

- Si **n** par y radicando positivo $\Rightarrow$ $\exists$ dos raíces reales opuestas.

$$\sqrt{4} = \pm 2 \qquad \sqrt[4]{81} = \pm 3$$

- Si **n** par y radicando negativo $\Rightarrow$ $\nexists$ solución en $\mathbb{R}$.

$\sqrt{-16}$ no tiene solución, pues ningún número real elevado a una potencia par, da por resultado un número negativo.

Para evitar estos inconvenientes, se trabaja con **Radicales Aritméticos**, aquellos donde $a \in \mathbb{R}^+ \wedge n \in \mathbb{N}$.

1) <u>Multiplicación o División del índice y el exponente por un mismo número natural</u>:
El valor de un radical no se altera si se multiplica o divide exactamente por un mismo número, el índice y el exponente.

- $\sqrt[n]{a^t} = \sqrt[n \cdot p]{a^{t \cdot p}}$
- $\sqrt[n \cdot p]{a^{t \cdot p}} = \sqrt[n]{a^t}$ (este proceso se llama **simplificación**)

2) <u>Extracción de factores fuera del radical</u>:
En algunos casos la simplificación no puede efectuarse de modo directo, sin embargo, si el <u>exponente del radicando es mayor que el índice</u>, después de descomponer convenientemente el radicando, es posible utilizar la simplificación para realizar <u>extracciones de factores</u> fuera del radical.

$$\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \, . \, a^1}$$
$$= \sqrt[3]{a^6} \, . \, \sqrt[3]{a}$$
$$= a^2 \, . \, \sqrt[3]{a}$$

No es posible realizar extracciones de factores cuando el exponente del radicando es menor que el índice, en este caso se dice que el radical es **irreducible**.

3) Radicales Semejantes:
Los radicales aritméticos irreducibles que tienen el mismo índice y el mismo radicando, se llaman **radicales semejantes**.

Operaciones con radicales

En las expresiones $a^{\frac{m}{n}}$, con $m,n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $a > 0$, se deben verificar las siguientes condiciones para operar de manera más sencilla:

- La base a debe estar expresada como producto de factores primos.
- El exponente $\frac{m}{n}$:
  - debe ser positivo: $\frac{m}{n} > 0$.
  - el numerador debe ser menor que el denominador: $m < n$.
  - ser una fracción irreducible: $mcd(m,n) = 1$.

Estas condiciones tienen su justificación en dos teoremas matemáticos muy importantes:

- El **Teorema Fundamental de la Aritmética** que afirma que "*todo número entero, distinto de 1, -1 y 0 se puede representar de forma única como un producto finito de números primos*".
- El otro nos asevera que "*si* p *es un número primo y* $mcd(\mathrm{m},\mathrm{n}) = 1$ *(*m *y* n *primos entre sí), entonces* $\sqrt[n]{p^m}$ *es un número irracional*".

Adición y ***Sustracción***: *la suma algebraica de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes dados.*

Para determinar si radicales no semejantes pueden transformarse en radicales semejantes equivalentes a los dados, se extraen los factores posibles de cada radical:

$$2\sqrt[3]{81} - 4\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3^4} - 4\sqrt[3]{2^3 \cdot 3}$$
$$= 2 \cdot 3\sqrt[3]{3} - 4 \cdot 2\sqrt[3]{3}$$
$$= 6\sqrt[3]{3} - 8\sqrt[3]{3}$$
$$= -2\sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{54} &= \sqrt{2}+\sqrt{2^3}-\sqrt{3^2\cdot 6}\\ &= \sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{6}\\ &= 3\sqrt{2}-3\sqrt{6}\end{aligned}$$

Cuando los radicales no pueden reducirse a radicales semejantes, la operación queda indicada.

Multiplicación: *el producto de radicales de* *<u>igual índice</u>*, *es otro radical de igual índice a los dados y radicando, el producto de los radicandos factores.*

El producto de radicales de *<u>distinto índice</u>* *se busca el* *<u>común índice</u>*, *o sea el múltiplo común menor de los índices dados, para transformar dicho producto en radicales de igual índice. O simplemente se los expresa como potencias de exponente fraccionario y se aplican las propiedades estudiadas de las potencias.*

$$\begin{aligned}\sqrt{10}\cdot\sqrt{2} &= \sqrt{10\cdot 2}\\ &= \sqrt{2^2\cdot 5}\\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a} &= a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{5}}\\ &= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}\\ &= a^{\frac{37}{30}}\\ &= \sqrt[30]{a^{37}}\\ &= a\sqrt[30]{a^7}\end{aligned}$$

División:

- de radicales de igual índice:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{32}:\sqrt[3]{4} &= \sqrt[3]{32:4}\\ &= \sqrt[3]{8}\\ &= 2\end{aligned}$$

- de radicales de distinto índice:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a^7} : \sqrt[6]{a^5} &= a^{\frac{7}{4}} : a^{\frac{5}{6}} \\ &= a^{\frac{7}{4}-\frac{5}{6}} \\ &= a^{\frac{11}{12}} \\ &= \sqrt[12]{a^{11}}\end{aligned}$$

Pero esto sólo es posible si los radicandos son posibles de dividir.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{a^2} &= \sqrt[3]{a : a^2} \\ &= \sqrt[3]{a^{-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\end{aligned}$$

Aún la división no quedó resuelta por lo que se debe encontrar otra fracción equivalente a ella en cuyo denominador no figure un radical, o sea un número racional, por ello este procedimiento se llama **racionalización**.

1) El denominador es un radical único:
Se multiplica numerador y denominador por un radical de manera tal que en el denominador quede un número racional.

$$\begin{aligned}\frac{7}{\sqrt{3}} &= \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{7}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2 a}}{\sqrt[3]{2^2 a}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{4a}}{\sqrt[3]{2^3 a^3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{4a}}{2a}\end{aligned}$$

2) El denominador es un binomio:
Se multiplica numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador, para que en el denominador quede expresada una diferencia de cuadrados y así obtener un número racional como divisor.

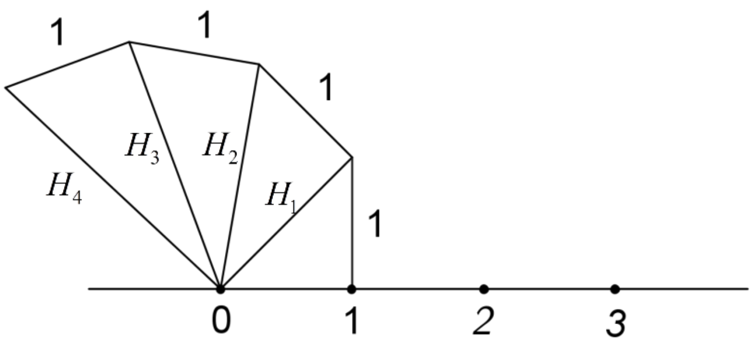
$$\begin{aligned}\frac{3}{4+\sqrt{5}} &= \frac{3}{4+\sqrt{5}} \cdot \frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} \\ &= \frac{12-3\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\ &= \frac{12-3\sqrt{5}}{11} \\ &= \frac{12}{11}-\frac{3}{11}\sqrt{5}\end{aligned}$$

a) Agregue al glosario que viene elaborando a lo largo de la clase todos aquellas palabras, expresiones y símbolos que fueron apareciendo.
b) Elabore un texto utilizando lenguaje coloquial, en el que le expliques a un compañero cómo operar con radicales.
c) ¿Por qué es necesario racionalizar una expresión que tiene un irracional en el denominador?

Actividad 7

Resuelva los siguientes ejercicios y problemas justificando con las propiedades estudiadas.

1) Todos los triángulos de la figura son rectángulos. El más pequeño tiene catetos unitarios y, en los restantes, uno de los catetos tienen medida igual a 1. Calculá la medida de la hipotenusa de los triángulos y trazá las circunferencias con centro en 0 y radio cada hipotenusa. ¿Qué números representan las intersecciones de cada circunferencia con la recta numérica?



2) Represente en la recta numérica los siguientes números, construyendo triángulos rectángulos adecuados como en el problema anterior:

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{8}$ **c)** $-\sqrt{10}$ **d)** $-\sqrt{29}$ **e)** $\sqrt{33}$ **f)** $2+\sqrt{2}$

3) Escriba:
a) los dos números naturales más próximos entre los que se encuentra $\sqrt{67}$ **.**
b) los dos números decimales más próximos con una cifra decimal entre los que se encuentra $\sqrt{67}$ **.**
c) los dos números decimales más próximos con tres cifras decimales entre los que se encuentra $\sqrt{67}$.

4) Transforme las expresiones decimales en expresiones fraccionarias y resuelva:

a) $\frac{2}{5}+0,333333...-0,36+0,0\overset{\frown}{6}=$

b) $\frac{(0,66666...-2)^2}{-\frac{3}{4}\sqrt{0,25}}=$

c) $\sqrt[3]{0,\widehat{8}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{46} \cdot 2,04444...} =$

d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{100}\right)^{-2} \cdot 0,2 + \left[(0,3)^{-2}\right]^{-1} =$

5) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

a) $\dfrac{58}{15} < \sqrt{15} < \dfrac{39}{10}$

b) $\sqrt[3]{20} < 2,714 < \dfrac{124}{45}$

c) $\sqrt[4]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[5]{7}$

6) Escriba tres números racionales que se encuentren entre $1,4$ y $\sqrt{2}$.

7) Invente un número irracional mayor que 2 pero menor que 2,1.

8) Los siguientes números irracionales fueron inventados siguiendo una regla. Descubra dicha regla y escriba las 8 cifras siguientes:

a) 0,101100111000111100000… **b)** 0,10200300040000…

9) Encuentre un número irracional que esté entre $\sqrt{2}$ y 2. ¿Podrá encontrar otro? Justifique.

10) En el conjunto de todos los números x tales que $2 < x < \sqrt{8}$

a) ¿Cuántos números naturales hay en este conjunto? ¿Por qué?
b) ¿Cuántos números racionales hay en este conjunto? ¿Por qué?
c) ¿Cuántos números irracionales hay en este conjunto? ¿Por qué?
d) ¿Cuántos números reales hay en este conjunto? ¿Por qué?

11) Extrae todos los factores que pueda fuera del radical:

a) $\sqrt[3]{ab^2c^4d^6} =$
b) $\sqrt[3]{8a^2b^5} =$
c) $\sqrt[3]{81} =$
d) $\sqrt[5]{64a^2b^5c^8} =$

12) Resuelva:

a) $\sqrt{8} + 2\sqrt{8} + 4\sqrt{8} =$
b) $\sqrt{5}\sqrt{5} - \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{24} =$
c) $2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + 2\sqrt{2} =$

d) $\sqrt{72}-\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{128}=$

e) $a\sqrt[4]{a}+2\sqrt[4]{a^5}=$

f) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}\cdot(1+\sqrt[4]{27})=$

13) Si la arista de un cubo mide $\sqrt{5}$. Calcule el perímetro y el área de una cara del cuerpo. Luego el volumen de dicho cuerpo.

14) Calcule la medida de la diagonal de un cubo de arista 2 unidades.

15) Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{\sqrt{32}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=$

b) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=$

c) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}=$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=$

e) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=$

f) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\right)^4}{\sqrt[5]{8}}=$

g) $\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^{-3}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{5}}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{5}{4}}\right)^{-1}}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}}}=$