Instituto de Enseñanza Superior Simón Bolívar

Profesorado para la Educación Secundaria en Matemática

<u>Profesores</u>: Olga Peñaloza y Víctor Palazzesi.

<u>Espacio Curricular</u>: Elementos de la Aritmética y el Álgebra.

Clase 3:

Los números racionales $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ decidieron ir al Teatro. cuando llegaron a la puerta se dieron con que la entrada se sacaba en orden… de menor a mayor!

Bueno entre ellos se acomodaron y $\frac{1}{2}$ dice: Yo voy primero…

Pero justo cuando se acercó a la boletería, llegó $\frac{2}{5}$… y dijo, no! Yo voy primero!!

Cuando se volvieron a acomodar, $\frac{5}{6}$ tranquilamente se colocó al final de la cola.

Abre la boletería y en el preciso instante en que $\frac{2}{5}$ se adelanta para sacar su entrada, llega corriendo $\frac{3}{10}$ y dice… Yo, yo voy primero!... y todavía faltan varios de mis hermanos!! Los décimos, y varios de ellos van primero…

Se pusieron a discutir… claro $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, llegaron primero y además 10 es mucho más grande que 2 y que 4. Cuando todavía nada estaba claro, llego $\frac{6}{15}$ y dijo… 15 es más grande que 10. Por lo tanto voy primero!!

Pequeño problema! Hay que ayudar a estos racionales a ordenarse para sacar la entrada…. Ustedes deberán dilucidar ¿Quién es el que saca la entrada primero?... sin antes olvidar que vienen TODOS!! ¿En qué momento sacan su entrada $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$?.

Si en la cola para las entradas , estuvieran $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{11}{15}$, $-\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{10}$, solamente:

a) ¿Cómo los colocaría en orden de menor a mayor?
b) Explique un procedimiento para ordenarlos?
c) Piense en algunas estrategias que sirvan para todos los números racionales
d) Escriba los casos que ha tenido en cuenta y relate el procedimiento que utilizaron.
e) Vea este video: https://youtu.be/yX97MMWh944
¿De qué números está hablando Adrián Paenza? ¿Qué ejemplos plantea?

Siempre que se mide algo, longitudes, capacidad, volumen, áreas, tiempo, etc., se utilizan *unidades de medida*. Así es que se *mide* cuántas veces cabe cierta unidad en aquello que se quiere medir. Pero sea cual fuera esta unidad, no siempre ésta cabe una cantidad entera de veces, y es necesario *fraccionarla*. Es así como surgieron históricamente las fracciones. Siglos más tarde, a estas fracciones se les dio una categoría de *números* ya que sirvieron para resolver problemas numéricos como por ejemplo *"hallar el número que multiplicado por 5 dé como resultado 2".*

La solución de dicho problema es la fracción $\frac{2}{5}$, y se lee "dos quintos". Las fracciones se representan como cocientes entre dos números enteros, llamados *numerador* y *denominador* respectivamente, siendo el denominador distinto de 0. Por ejemplo:

$$\frac{7}{3}, \quad \frac{-2}{8}, \quad \frac{0}{-5}, \quad \frac{3}{3}, \quad \ldots$$

El producto entre toda fracción y su denominador es igual al numerador de dicha fracción. Por ejemplo $\frac{2}{5}.5 = 2$.

El conjunto formado por todas las fracciones, es decir aquellos números que pueden expresarse como cocientes entre dos números enteros, se denomina el conjunto de los *números racionales* y se lo denota con la letra $\mathbb{Q}$.

Actividad 2

a) ¿Qué entiende por número racional? Elabore una definición coloquial y simbólica.
b) Investigue por qué se simboliza al conjunto de los números racionales con $\mathbb{Q}$?
c) ¿Por qué es posible identificar a los enteros como números racionales? ¿Existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{Z}$ y una parte de $\mathbb{Q}$? Explique.
d) ¿Valen las propiedades de las operaciones ya estudiadas para este conjunto numérico? ¿Cuáles se pueden agregar?

Actividad 3

Resuelvan los siguientes problemas:

1) Un pirata encontró en uno de sus viajes 36 máscaras de oro de una antigua civilización. Decidió compartirlas con aquellos marineros que más habían colaborado y ofreció al primero una máscara y la séptima parte del resto; al segundo dos máscaras más un séptimo del resto, al tercero tres máscaras más la séptima parte del resto y así hasta llegar al último. ¿Cuántos marineros recibieron el obsequio? ¿Cuántas máscaras de oro recibió cada uno?

2) En el terreno que compró el club estudiantil para instalar el campo de deportes, van a construir una cancha de futbol y una pileta de natación. La cancha medirá de largo las tres cuartas partes del largo del terreno y de ancho dos quintos del ancho del mismo. La comisión de deportes pidió a los asociados que propongan la ubicación de la cancha mediante gráficos.

a) Represente el terreno y dibujen en él la cancha.
b) ¿Qué parte del campo ocupará la canchita?
c) Si la pileta debe ocupar un área igual a a tercera parte del área de la cancha, ¿qué parte del terreno se debe destinar para la misma?
d) ¿Qué parte del terreno quedará disponible?

Luego de resolver los problemas…

a) Escriba cómo le explicaría a un amigo que no sabe sumar y multiplicar fracciones.
b) Defina a la adición y multiplicación de números racionales de manera simbólica.
c) Según se trabajó en $\mathbb{Z}$, la multiplicación en dicho conjunto no posee elemento inverso. ¿Lo tiene en $\mathbb{Q}$? ¿Todo número racional tiene inverso multiplicativo?
d) ¿Se mantienen las propiedades de las operaciones estudiadas para $\mathbb{Z}$ en el conjunto de los números racionales? ¿Cuáles se agregan? Escríbalas simbólica y coloquialmente.
e) Analice si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando su respuesta.
"Para dividir dos números racionales se calcula el producto entre el *dividendo* y el inverso multiplicativo del *divisor*".
Proponga ejemplos.
f) En base a lo que respondió en el ítem anterior ¿Por qué la división puede trabajarse como una multiplicación?

Con la introducción de los números racionales se amplía la definición de potenciación con exponentes enteros negativos. Se define la potencia de un número racional con exponente negativo como otra potencia cuya base es el inverso multiplicativo de la base dada y cuyo exponente es el opuesto del dado.

En símbolos: $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}-\{0\}, \forall n \in \mathbb{Z}-\{0\}: \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

Por ejemplo:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$$

Observación: en la definición se excluye el caso en que la base y el exponente sean simultáneamente nulos, puesto que dicha potencia no está definida.

En el caso que la base sea nula y el exponente un entero no nulo, la potencia será nula. En caso de que el exponente sea nulo y la base un racional no nulo, la potencia será 1 tal como se definió en $\mathbb{Z}$.

En símbolos: $\forall n \in \mathbb{Z}-\{0\}: 0^n = 0 \quad \wedge \quad \forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}-\{0\}: \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

La *división* de un número racional por otro se define como el producto entre el primer factor y el inverso multiplicativo del segundo factor. Por ejemplo, la división del número racional 3 por $\frac{5}{4}$ consiste en obtener el producto entre 3 y $\frac{4}{5}$. La operación de división se simboliza con ":" o con la línea de fracción:

$$3 : \frac{5}{4} = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} \qquad \text{o} \qquad \frac{3}{\frac{5}{4}} = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

En símbolos:

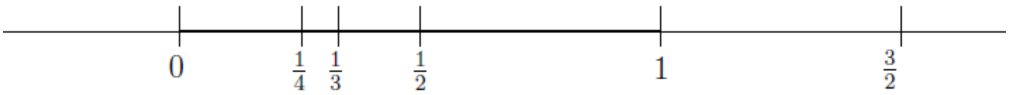
$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{c}{d} \neq 0: \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Actividad 4

a) Enuncie coloquial y simbólicamente las propiedades de la potenciación en el conjunto de los números racionales.
b) ¿Por qué en las definiciones de potencias de exponente negativo, la base de dichas potencias no puede ser 0?

Representación de los números racionales en la recta numérica

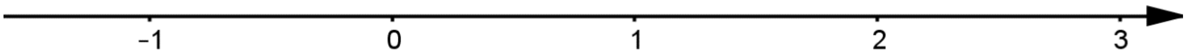
Los números racionales también pueden representarse en la recta. Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, … que son partes de una unidad, se representan precisamente fraccionando el segmento unidad en tantas partes como indica el denominador. La fracción $\frac{3}{2}$ se representa como 3 veces $\frac{1}{2}$. Es muy importante notar que si dos fracciones son equivalentes se representan por un mismo punto en la recta numérica.



Entre dos números enteros existen sólo un número finito de números enteros. Por ejemplo, entre 5 y -4 hay solo 8 números enteros; pero ¿cuántos números racionales hay?

Actividad 5

Represente en la recta numérica los números racionales $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$



a) Escriba tres números racionales comprendidos entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$ y represéntelos en la recta numérica.

b) ¿Pueden obtenerse más números racionales entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$, además de los ya escritos?

c) ¿Cuántos racionales es posible encontrar entre dos números racionales?

d) ¿Los números racionales completan la recta numérica?

e) **Definición**: si entre dos números distintos de un conjunto numérico, existen infinitos números de dicho conjunto, se dice que el conjunto es **denso**.
De acuerdo con la definición anterior: ¿$\mathbb{Q}$ es denso? ¿Y $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$?

Para responder al ítem d) basta tomar el promedio entre dos racionales y al resultado promediarlo con alguno de ellos, repitiendo el proceso indefinidamente. Por ejemplo, si se toman el 0 y el 2, se tiene que ambos son números racionales. Su promedio es el número que está entre ambos y equidista de los dos, y es igual a la semisuma de los dos números: $\frac{0+2}{2}=1$. El número 1 está entre 0 y 2 y es racional. Si se calcula ahora el promedio entre 0 y 1: $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. Nuevamente se obtiene un número racional; y repitiendo este proceso se obtiene una sucesión infinita de números racionales distintos, todos entre 0 y 2:

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4},\quad \frac{0+\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8},\quad \frac{0+\frac{1}{8}}{2}=\frac{1}{16},\quad \frac{0+\frac{1}{16}}{2}=\frac{1}{32},\quad \ldots$$

f) ¿Significa esto que si se representan todos los números racionales en una recta, se habrá "llenado" toda la recta?

También, puede definirse en $\mathbb{Q}$ la relación "$<$" como:

$$\forall \frac{p}{q},\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}:\quad \frac{p}{q}<\frac{r}{s}\quad \Leftrightarrow \quad ps<qr$$

g) Escriba las propiedades del $\mathbb{Q}$

Expresión decimal

Los números racionales suelen expresarse también en notación *decimal*, por ejemplo: $\frac{5}{10}=0,5$

Aquellas fracciones que son equivalentes a una fracción con denominador 1, 10, 100 u otra potencia de 10 tienen una expresión decimal *finita*, y se denominan *fracciones decimales*. Por ejemplo, $\frac{7}{25}$ es equivalente a $\frac{28}{100}$, por lo tanto es una fracción decimal y se expresa en notación decimal como $0,28$ y se lee "veintiocho centésimos". Si no son equivalentes a una expresión con denominador que sea potencia de 10 tienen una expresión decimal *infinita periódica*. Esto significa que en la parte decimal existe una secuencia de uno o más números que se repite indefinidamente. A dicha secuencia se la denomina *periodo*. Por ejemplo, $\frac{3}{9}$ se expresa como $0,333\ldots$, y su periodo es 3. Para denotar el periodo se lo suele marcar con un arco " " sobre él.

Así, se tienen los siguientes ejemplos de números racionales y su representación decimal:

$$\frac{6}{100}=0,06\,;\quad \frac{6}{9}=0,6666\ldots=0,\overset{\frown}{6}\,;\quad \frac{3540}{990}=3,58484\ldots=3,584\,.$$

Por otro lado, todas las fracciones decimales también tienen una representación decimal infinita periódica. Para ver esto, note que $\frac{1}{3}=0,\overset{\frown}{3}$ y también $3\cdot\frac{1}{3}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}1&=3\cdot\frac{1}{3}\\&=3\cdot 0,\overset{\frown}{3}\\&=0,\overset{\frown}{9}\end{aligned}$$

Así se tiene también que $4,53=4,52\overset{\frown}{9}$ y $1,239=1,238\overset{\frown}{9}$.

La importancia de la notación decimal es que todas las fracciones equivalentes tienen una misma representación, finita o periódica. Así, por ejemplo:

$$\frac{7}{4},\ \frac{14}{8},\ \frac{35}{20},\ \frac{175}{100}$$

son fracciones equivalentes, y todas con la misma representación decimal $1,75$ o $1,74\overset{\frown}{9}$.

Si se quiere expresar una fracción en su expresión decimal, sólo basta con resolver la división planteada entre el numerador y el denominador de dicha fracción.

Suponga ahora que se quiere expresar al número $2,345$ como fracción:

$$p=2,34545454545\ldots \quad (1)$$

Si se multiplica en ambos miembros por 10, de acuerdo con la propiedad uniforme de la multiplicación en $\mathbb{Q}$, se obtiene:

$$10p = 23,4545454545... \quad (2)$$

Multiplicando en ambos miembros de (1) por 1000, de acuerdo con la propiedad uniforme de la multiplicación en $\mathbb{Q}$, se obtiene:

$$1000p = 2345,45454545...$$

Restando miembro a miembro la igualdad (2) de la (3) se obtiene:

$$990p = 2322$$

Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{990}$:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2322}{990} \\ &= \frac{129}{55} \end{aligned}$$

Como puede observar, el objetivo de este procedimiento es eliminar la parte decimal periódica de las expresiones decimales, multiplicando en ambos miembros de igualdades como la (1) por dos potencias de 10 adecuadas que permitan obtener la misma parte decimal de manera que al restar miembro a miembro ambas igualdades se anule la parte decimal para poder despejar el valor de p y hallar la expresión fraccionaria buscada.

Actividad 6

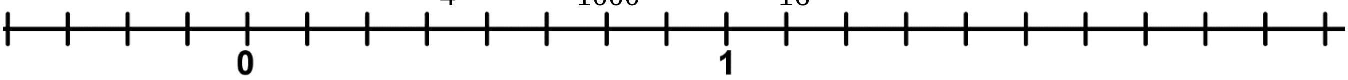
Resuelva los siguientes ejercicios y problemas.

1) Represente en la recta numérica los siguientes números racionales:

a) $\frac{5}{2}$ **b)** $-\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{7}{4}$ **d)** $-\frac{9}{4}$ **e)** $\frac{10}{3}$

2) Ubique en la recta numérica los siguientes números racionales:

$+1\frac{3}{4}$; $-\frac{375}{1000}$; $-\frac{3}{16}$ y 0,250



3) Determine la expresión decimal de los siguientes números racionales:

a) $\frac{23}{5}$ **b)** $-\frac{72}{12}$ **c)** $\frac{15}{11}$ **d)** $-\frac{49}{75}$ **e)** $\frac{451}{90}$

4) Exprese como fracción los siguientes números decimales:

a) $1,25$ **b)** $1,25$ **c)** $1,2\overset{\frown}{5}$ **d)** $0,352121...$ **e)** $1,119$