



Instituto de Enseñanza Superior Simón Bolívar
Profesorado para la Educación Secundaria en Matemática



Profesores: Olga Peñaloza y Víctor Palazzesi.

Espacio Curricular: Elementos de la Aritmética y el Álgebra.

Clase 2:

Actividad 1

Resuelva el siguiente problema:

A 90 aspirantes para cubrir un puesto en una empresa se les preguntó los idiomas que hablan con un nivel "Muy bueno" y se obtuvo la siguiente información: ninguno de los que habla "francés" habla "portugués", 55 aspirantes hablan "inglés", 13 hablan "portugués", 5 hablan "inglés" y "francés", 62 hablan "portugués" o "inglés" y 15 no hablan ningún idioma.

- a) ¿Cuántos aspirantes hablan únicamente francés?
 - b) ¿Cuántos aspirantes hablan un solo idioma?
 - c) ¿Cuántos aspirantes no hablan portugués?
 - d) ¿Cuántos aspirantes hablan portugués y francés?
-
- a) Al contar los elementos de los conjuntos de aspirantes para poder responder a las preguntas necesitó algún número que no fuera natural? ¿Cuál?
 - b) Investiga cómo se denota al conjunto numérico formado por todos los números naturales y este nuevo número.
 - c) ¿Se mantienen las propiedades estudiadas para las operaciones definidas en \mathbb{N} ? ¿Aparecen nuevas propiedades en este conjunto numérico? En caso afirmativo enúncielas coloquial y simbólicamente.
 - d) Analice y escriba las propiedades que cumple este nuevo conjunto numérico ayudándose con las estudiadas para el conjunto \mathbb{N} .

Actividad 2

En el video que vio en la clase anterior Paenza expresa la necesidad de definir el conjunto de los números enteros para representar situaciones como por ejemplo las deudas.

Se establece una "**correspondencia biunívoca**" entre \mathbb{N} y \mathbb{Z}^+ (conjunto formado por los enteros positivos) es decir, a cada número natural le corresponde o se "identifica" con un único número entero positivo y viceversa, a cada número entero positivo le corresponde o se "identifica" con un único número natural. O sea

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N} = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \dots \} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathbb{Z}^+ = \{ & +1, & +2, & +3, & +4, & +5, & +6, & +7, \dots \} \end{array}$$

Además, para cada entero positivo se considera el *opuesto* como el número entero que sumado a él da como resultado 0. Así, por ejemplo el número que sumado a +1 da como resultado 0 se lo denota -1 y es el *opuesto* al número entero positivo +1. El opuesto de +2 es -2, el de +3 es -3 y así sucesivamente.

Todos los opuestos de los números enteros positivos se denominan *enteros negativos* y al conjunto formado por todos los números enteros negativos se lo denota con \mathbb{Z}^- . Así, los enteros negativos, los positivos y el cero dan lugar al conjunto de los *Números Enteros*.

$$\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3, +4, \dots\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$

$$\therefore \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

Además, así como -3 es el opuesto de +3, también se dice que +3 es el opuesto de -3, y que el 0 es el opuesto de sí mismo.

En símbolos:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \exists -a \in \mathbb{Z} / a + (-a) = (-a) + a = 0$$

- a) ¿Qué significa el enunciado " $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ "
- b) ¿Qué situaciones de tu entorno cotidiano puedes representar utilizando números de este conjunto?
- c) Investigue por qué se denota con \mathbb{Z} a este conjunto numérico.
- d) ¿Qué significa "correspondencia biunívoca" en este contexto?

Las operaciones de adición y de multiplicación se extienden a este nuevo conjunto.

La *diferencia* entre dos números enteros se denota con el símbolo "-", por ejemplo entre $10 - (-2)$.

El número 10 en este caso recibe el nombre de *minuendo*, el -2 se llama *sustraendo*, la operación es la *sustracción* y el resultado se lo conoce como *diferencia*.

$$\exists a, b, c \in \mathbb{N} / a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$$

Observe que la sustracción en \mathbb{Z} es una adición en dicho conjunto. En efecto, la sustracción de dos números enteros se define como la adición entre el minuendo y el opuesto del sustraendo:

$$1 - 4 = 1 + (-4) = -3, \quad -7 - 15 = -7 + (-15) = -22$$

En símbolos: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a - b = a + (-b)$

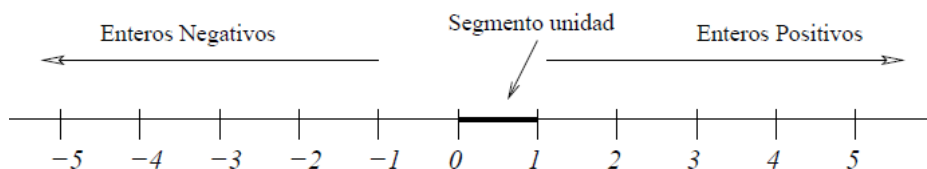
Así como en \mathbb{N} existe un orden natural: $1 < 2, 2 < 3, 3 < 4, \text{etc.}$, en \mathbb{Z} también hay un orden compatible con el que se define en \mathbb{N} . Los números enteros conforman una sucesión infinita de números, donde cada elemento tiene un *sucesor* que se obtiene sumando $+1$ al número, y un *antecesor*, que se obtiene sumándole -1 . Por ejemplo, -7 es el antecesor de -6 pues $-6 + (-1) = -7$, y -5 es el sucesor de -6 pues $-6 + (+1) = -5$. La siguiente es una lista ordenada de algunos enteros:

$$\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots$$

Propiedades del \mathbb{Z}

- 1) Es un conjunto infinito y totalmente ordenado por la relación " \leq ".
- 2) Todo número entero tiene siguiente y un anterior.
- 3) Este conjunto no tiene primer elemento, ni tiene último elemento (como consecuencia de 2)).
- 4) Entre dos números enteros existe un conjunto finito de números enteros. Por ello se dice que el conjunto \mathbb{Z} es discreto.

Claramente, existen muchos puntos de la recta que no se corresponden con ningún número entero. La siguiente figura es una representación de algunos números enteros:



- e) ¿Valen las propiedades de la adición y la multiplicación estudiadas en los conjuntos numéricos anteriores? ¿Qué nuevas propiedades se pueden deducir? Proponga ejemplos y elabore conjeturas.
- f) ¿Posee la multiplicación en \mathbb{Z} elemento inverso? ¿Por qué?
- g) Proponga ejemplos de multiplicaciones de números enteros con igual y distinto signo y observe el signo del producto. Elabore una conjetura.
- h) Proponga ejemplos de potencias cuyas bases tengan distinto signo y sus exponentes sean no negativos. ¿Cuál es el signo de las potencias? Elabore conjeturas. ¿Qué sucede cuando el exponente es negativo?
- i) ¿Por qué la sustracción no se define como operación en \mathbb{Z} ?
- j) Enuncie simbólicamente y coloquialmente todas las propiedades que cumplen la adición, la multiplicación y la potenciación en \mathbb{Z} .
- k) Explique con sus palabras el significado de las propiedades del \mathbb{Z} .

Actividad 3

El "LOTER DOBLE" y el "LOTER 3" son juegos de azar cuyos premios tienen en cuenta las tres últimas cifras del número sorteado por la Lotería Nacional. En el primero, el ganador recibe una suma de dinero equivalente al doble de la terminación del número sorteado, más 100. En el otro, en cambio, el premio consiste en la cantidad de dinero que resulta de hallar el doble de: la terminación del número sorteado más 100.

- a) ¿Cuál de los dos juegos entrega mayor cantidad de dinero en un mismo sorteo?
- b) ¿Cuál es el mayor y cuál el menor monto que puede ganarse en cada uno de los juegos?

Para reflexionar sobre este problema, se necesita tener en cuenta la importancia de los signos. Observe esta otra situación:

Un juez lee el siguiente testimonio: "El mayordomo declaró el chofer es culpable". Según como se lea, se puede interpretar que el chofer culpa al mayordomo o que éste acusa al chofer:

"El mayordomo, declaró el chofer, es culpable"

"El mayordomo declaró: el chofer es culpable"

En esta oración, el signo de puntuación determina el significado.

- c) Si en un cálculo intervienen distintas operaciones, ¿qué se resuelve primero? ¿Y después? ¿Por qué se adopta esta convención?
- d) ¿Cuándo es necesario utilizar paréntesis, corchetes y llaves en el planteo de un cálculo?
- e) Explique el significado de la expresión "separar en términos" que aprendió en la secundaria.

Actividad 4

Resuelva los siguientes ejercicios y problemas justificando su procedimiento con las propiedades estudiadas.

- 1) A 100 estudiantes de profesorado se les preguntó acerca de sus series televisivas favoritas y se obtuvo la siguiente información: todo el que ve la serie "Vikings" también ve "Game of Thrones", 72 estudiantes ven "Game of Thrones", 19 ven "Vikings", 23 ven "Game of Thrones" y "Stranger Things", 63 ven "Vikings" o "Stranger Things" y 2 de los que ven "Vikings" también ven "Stranger Things".
 - a) ¿Cuántos estudiantes no ven ninguna de las tres series?
 - b) ¿Cuántos estudiantes ven solamente una serie?
 - c) ¿Cuántos ven "Stranger Things" pero no ven "Vikings"?
- 2) En una florería arman ramos pequeños y ramos grandes. Cada ramo pequeño tiene 3 rosas y cada ramo grande tiene 7 rosas. Si usaron 144 rosas y armaron 20 paquetes pequeños, ¿cuántos ramos grandes armaron?

3) En la heladería Ailén compró 3 cucuruchos. Pagó con un billete de \$200 y recibió \$35 de vuelto. Beto compró 2 vasitos. Pagó con un billete de \$100 y recibió \$30 de vuelto. Carla compró dos cucuruchos y un vasito. ¿Cuánto pagó Carla en total?

Seleccione el planteo que permite hallar la respuesta a este problema y resuélvalo:

- $200 - 35 : 3 \cdot 2 + 100 - 30 : 2 =$
- $(200 - 35 : 3 \cdot 2) + (100 - 30 : 2) =$
- $200 : 3 \cdot 2 - 35 + 100 : 2 - 30 =$
- $(200 - 35) : 3 \cdot 2 + (100 - 30) : 2 =$
- $\{[(200 - 35) : 3] \cdot 2\} + (100 - 30) : 2 =$

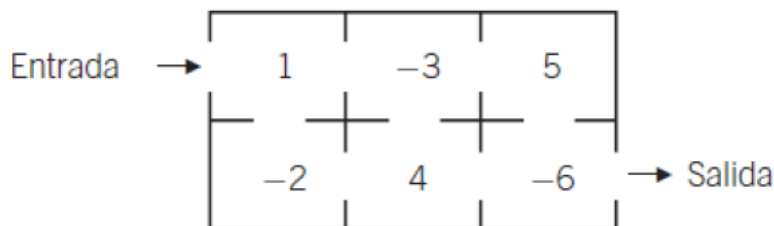
4) En una bolsa hay caramelos de 3 gustos: frutilla, limón y naranja. En total hay 478 caramelos. Con los caramelos de frutilla se armaron 16 paquetitos de 6 caramelos y sobraron 2. Con los caramelos de limón se armaron 25 paquetitos de 8 caramelos y no sobró ninguno. Con los caramelos de naranja, ¿cuántos paquetitos de 5 caramelos se pueden armar?

5) Olivia perdió el contacto de una de sus amigas y necesita llamarla con urgencia. Recuerda la característica del número de teléfono y de las otras 7 cifras recuerda que son 0, 5, 6, 7, 8 y 9 pero no recuerda en qué orden ni cuál es la que se repite. ¿Cuál es el número de llamadas que a los sumo tiene que hacer Olivia para que una de ellas corresponda al número correcto?

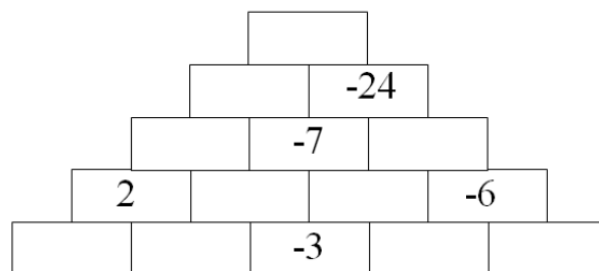
6) Coloque los paréntesis, corchetes o llaves necesarios para que la siguiente igualdad sea verdadera:

$$2 + 3^2 + 9 : 3 : 3 \cdot 5 + 5^0 = 21$$

7) ¿Cuál será el camino cuya suma sea la menor para ir desde la entrada a la salida?
¿Cuál será el camino para que la suma sea la mayor?



8) En la siguiente pirámide el número de cada casilla debe ser la suma de los dos números de las casillas sobre las que se apoya. Complétela:



9) Si Pitágoras murió en el año 493 a.C y nació en el año 580 a.C. ¿Cuántos años vivió?

10) El siguiente mensaje cifrado fue enviado por un espía; el servicio de inteligencia ha descubierto el código que lo descifra; este consiste en que cada letra tiene asociada una operación de números enteros. Resuelva las operaciones de números enteros que se indican y descifre el mensaje.

| | | | | | |
|------------------|---|-----------------|---|----------------|---|
| $(-4)+(-15)=-19$ | Y | $(-10)-7$ | V | $(-35):(-7)$ | A |
| $6-(-4)$ | E | $(-5)+9$ | T | $(-28)-(-5)$ | Q |
| $(-3)\cdot 2$ | N | $9+3$ | I | $(-9)\cdot 1$ | E |
| $(-15):15$ | S | $(-9)\cdot(-1)$ | N | $9+(-8)$ | U |
| $12:(-3)$ | S | $(-4)\cdot 0$ | O | $(-20)+(-4)$ | E |
| $(-4)\cdot(-7)$ | D | $(-15)+0$ | I | $(-5)-(-7)$ | A |
| $7+(-19)$ | E | $0-7$ | S | $30:5$ | A |
| $-8-(-6)$ | Z | $30:2$ | E | $3+(-13)$ | E |
| $5\cdot 4$ | I | $14+(-17)$ | N | $(-11)\cdot 3$ | C |
| $(-84):(-4)$ | A | $4\cdot(-2)$ | S | $7+1$ | R |

MENSAJE:

| | | | | | | | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | Y | | | |
| 28 | 20 | 10 | -2 | 4 | 21 | -6 | -23 | 1 | -12 | -1 | -19 |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| -4 | 15 | 12 | -8 | -5 | -17 | -15 | 0 | 9 | -9 | -7 | |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| -8 | -24 | 2 | -33 | -10 | 8 | -33 | 6 | -3 | | | |

11) Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

- a) Todos los números enteros son naturales.
- b) Todos los números naturales son enteros.
- c) Algunos números naturales son enteros.
- d) Algunos números enteros son naturales.
- e) Existen números naturales que no son enteros.

12) Resuelva el siguiente cálculo, justificando con las propiedades de las operaciones definidas en \mathbb{Z} :

$$\frac{(5^6 : 5^5)^4}{5^2} - |-(23 + (-45))| + 1001^0 \cdot (-20 : (-4)) =$$