Inecuaciones

Una **desigualdad** es toda expresión en la que hay dos miembros relacionados mediante cualquiera de estos signos: $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$. Si esos miembros son expresiones algebraicas, estamos en presencia de una **inecuación**, en la cual figuran números e **incógnitas**.

Expresen en lenguaje simbólico las desigualdades correspondientes a este aviso publicado en un matutino de la ciudad de Buenos Aires. Para ello, indiquen los *años de experiencia* con la letra ***a*** y la *edad* con la letra ***e***.

RESPONSABLE DE SEGURIDAD E HIGIENE

INGENIERO ESPECIALISTA

- Con tres años de experiencia mínima
- Edad de 25 a 40 años

ENVIAR CURRÍCULUM INDICANDO

....

Los valores de las incógnitas que verifican cada desigualdad son las **soluciones** de cada inecuación.

Ejemplo: ***a*** = ... es una posible solución de la primera inecuación y ***e*** = ... es una posible solución de la segunda inecuación y también de la tercera.

Resolver una inecuación significa hallar los valores que deben tomar sus incógnitas para que se cumpla la desigualdad. Para ello, hay que tener en cuenta estas tres propiedades fundamentales:

- ***Si sumamos o si restamos un mismo número a ambos miembros de una desigualdad, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido.***

En símbolos: $\boxed{a > b \Rightarrow a \pm c \ldots\ldots b \pm c}$

- Comprueben esta propiedad para el caso en el que a = 7, b = 3 y c = 4: ...... > ...... => ...... + 4 > ....
- Apliquen esa propiedad en este caso: –3 > –8 => –3 + (–1) ....

- ***Si multiplicamos por un mismo número positivo a ambos miembros de una desigualdad, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido.***

En símbolos: $\boxed{\textit{Si } a > b \textit{ y } c > 0\textit{, entonces: } a \cdot c \ldots\ldots b \cdot c}$

- Comprueben esta propiedad para los siguientes casos:
- a = 4, b = –3 y c = 6: ...... > .... y .... > 0 => ....
- a = –2, b = –5 y c = 3: ...... > .... y .... > 0 => ....

- ***Si multiplicamos por un mismo número negativo a ambos miembros de una desigualdad, obtenemos otra desigualdad de sentido contrario.***

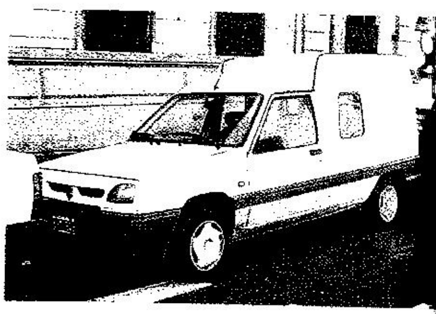
En símbolos: $\boxed{\textit{Si } a > b \textit{ y } c < 0\textit{, entonces: } a \cdot c \ldots\ldots b \cdot c}$

- Comprueben esta propiedad para el caso en el que a = 4, b = –2 y c = –3: ..... > ...... y ...... < 0 => ....
- Apliquen esta propiedad en este caso, en el cual c = –4: –3 > –7 => –3 . (–4) ....

Inecuaciones lineales

Llamamos **inecuaciones lineales** a las desigualdades del tipo: $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ o $ax + b \geq 0$, donde a y b son números reales. Para resolverlas, aplicamos las propiedades que vimos en la página 57.

Ejemplo: Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?



En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

Peso de la furgoneta – peso de 4 cajones no es menor que 415 kg

$$875 - 4 \cdot x \geq 415$$

Para resolver la inecuación, seguimos estos pasos:

- Restamos 875 a ambos miembros de la desigualdad → $-4 \cdot x \geq 415 -$ ....
- Hacemos el cálculo en el segundo miembro → $-4 \cdot x \geq$ ....
- Para despejar x, multiplicamos ambos miembros por $-\frac{1}{4}$ (**Cuidado:** como multiplicamos por un número negativo, **debemos cambiar el sentido de la desigualdad**) → x ....
- Hacemos el cálculo → x ....

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los .... kg. Además, como se trata de un peso, obviamente $x > 0$.
Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo (......; ....].
Graficamos la solución en la recta real:

Practiquen

26. En una camioneta se cargan tres cajas de igual peso y otro bulto de 4 kg. Indiquen entre qué valores puede oscilar el peso de cada caja sabiendo que la carga máxima de la camioneta no supera los 19 kg.
27. El perímetro de un cuadrado de lado x no supera el perímetro del rectángulo de la figura.

2 cm

6 cm

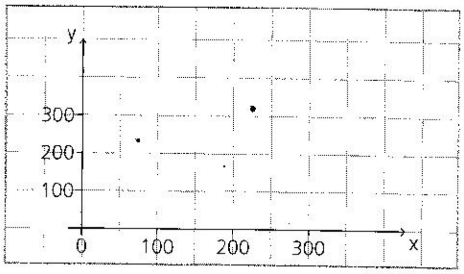
¿Qué pueden asegurar acerca de la superficie S del cuadrado? Exprésenlo mediante una inecuación.
28. Fabricio quiere alquilar una moto. En La Moto Feliz le cobran \$ 50 fijos más \$ 2 por kilómetro recorrido, y en La Moto Veloz simplemente le cobran \$ 6 por kilómetro recorrido. ¿A partir de qué recorrido le resulta más conveniente alquilar en La Moto Feliz?
29. En una mesa del bar La Gaita, diez personas consumieron café con leche con medialunas. Una de ellas pagó con un billete de \$ 50 y le dieron vuelto. En otra mesa de cuatro chicos consumieron lo mismo, quisieron pagar con un billete de \$ 10 y no les alcanzó. ¿Entre qué valores se encuentra el precio de ese desayuno en La Gaita?
30. Resuelvan las siguientes inecuaciones y representen el conjunto solución en la recta real:

a) $2x - 3 < 4 - 2x$	b) $6 - 5x < 8 + 3x$
c) $4 - x < x + 18$	d) $2 + 5x > 14 - 3x$
e) $4 - 5x > 2x - 10$	f) $4 - 2x \geq x - 5$
g) $5 + 3x \leq 4 - x$	h) $x + 8 \leq 3x + 1$

Inecuaciones lineales en el plano

En el ascensor de un edificio antiguo se puede leer este cartel: [illegible]

Si simbolizamos con las variables x e y los posibles pesos de dos personas que suben juntas en ese ascensor, podemos plantear la siguiente inecuación: $x + y$ **200**



Vamos a representar gráficamente la situación. Para ello:

- Consideramos la ecuación $y + x = 200$ y despejamos la variable y:

  y = ...

  Así, obtuvimos la ecuación de una recta cuya pendiente es ....

  y cuya ordenada al origen es ....

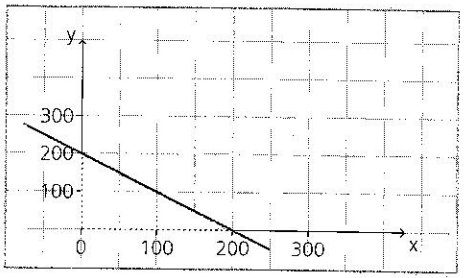
- Trazamos esa recta en el sistema de ejes cartesianos.
  Los puntos de esa recta son las posibles combinaciones de los pesos de las dos personas que, juntas, pesan 200 kg.
  Podemos observar que *la recta divide el plano en dos semiplanos.*
- Consideren 300 kg como el límite máximo de peso para una persona y coloreen con azul la región del plano cuyos puntos representan todas las combinaciones de pesos "prohibidas" para subir en ese ascensor. Tracen una línea de puntos sobre la recta $y = -x + 200$.

  La zona que colorearon representa las inecuaciones: $y + x$ .... **200** x .... **300** y **300**

- Como las variables x e y representan pesos, *ambas toman valores* **positivos.**
  Planteen las inecuaciones correspondientes a los puntos que representan todas las combinaciones de pesos "permitidas" para subir en ese ascensor:

  ....

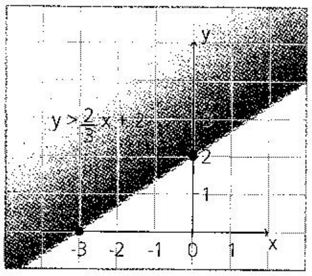
Entonces, el **conjunto solución** de esta situación está representado por esta región del plano (presten atención a las líneas punteadas):

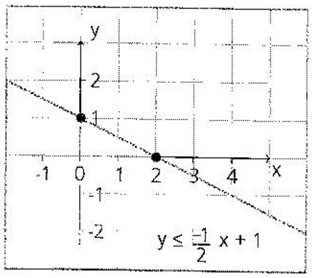


Cuando trabajamos en el plano, el conjunto solución de una inecuación lineal es un semiplano. Para determinar cuál es, probamos con un punto.

Si la inecuación es de la forma: $y < ax + b$ o $y > ax + b$, el conjunto solución es uno de los dos semiplanos determinados por la recta $y = ax + b$, sin incluir esta recta borde (la marcamos con una línea punteada).

Si la inecuación es de la forma: $y \geq ax + b$ o $y \leq ax + b$, se incluye la recta borde.

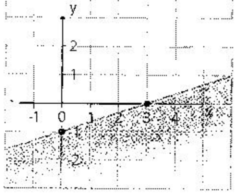


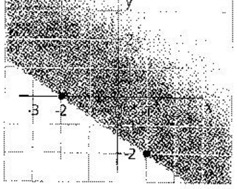


Practiquen

► 31. Representen gráficamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:
a) $x < y - 3$ b) $x + y > 1$ c) $-4x \leq y$
d) $-3y \geq 6x + 9$ e) $5 < 2x - y$

► 32. Escriban la inecuación que corresponde a cada uno de los siguientes gráficos:

a) 

b) 

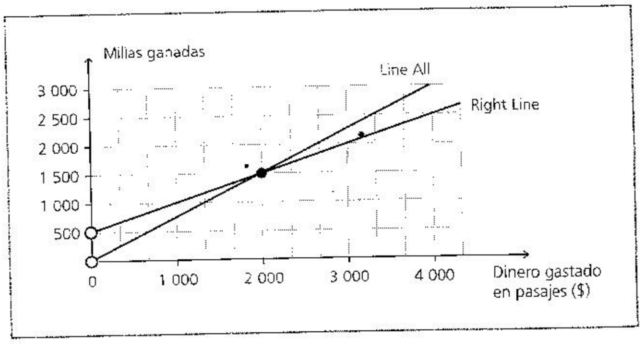
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

En la apertura de este capítulo, cuando interpretamos gráficamente las propuestas de las líneas aéreas Line All y Right Line, obtuvimos puntos que pertenecen a dos rectas.

Los puntos que pertenecen a la recta de color rojo verifican la ecuación: $y =$ .... y los que pertenecen a la recta de color azul verifican la ecuación:

$y =$ ....

Como tenemos **un par de ecuaciones lineales con dos incógnitas** (en nuestro ejemplo x e y) que consideramos simultáneamente, decimos que forman un **sistema.** $\begin{cases} y = 0{,}75x \\ y = 0{,}5x + 500 \end{cases}$



En el gráfico podemos observar que si se compran pasajes por $ 2 000, las dos compañías otorgan .... cantidad de millas, es decir que el punto de coordenadas (2 000; 1 500), *que pertenece a ambas rectas, satisface al mismo tiempo* las dos *ecuaciones del sistema*. Por eso, decimos que es su **solución**.

Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas significa hallar, si es que existen, todos los puntos que tienen en común las rectas del sistema.
Estudiaremos algunos métodos algebraicos para resolver estos sistemas.

Método de igualación

Vamos a resolver el sistema planteado arriba: $\begin{cases} y = 0{,}75x \\ y = 0{,}5x + 500 \end{cases}$

1.er paso: **Despejamos la misma incógnita en cada ecuación.** En nuestro caso, este paso ya está hecho.

2.do paso: **Igualamos las expresiones que obtuvimos y resolvemos la ecuación con una incógnita que se formó.**

$0{,}75x = 0{,}5x + 500$ => .... = ...

=> .... = ... => $x =$ ....

3.er paso: **Sustituimos el valor de la incógnita que hallamos en cualquiera de las ecuaciones que obtuvimos en el primer paso y calculamos el valor de la otra incógnita.**

En la ecuación .... sustituimos la incógnita x por el valor ...., y así obtenemos:

$y =$ ....

Es decir que la solución del sistema es el par ordenado (................; ....). Con este método algebraico pudimos corroborar la solución que habíamos obtenido a través del gráfico.
Al sustituir las incógnitas por los valores de x e y hallados, en cada ecuación del sistema se verifica la igualdad.

Practiquen

33. Resuelvan los siguientes sistemas y grafiquen:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = 3x - 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + 1 = 2x \\ 4 - y = 0{,}5x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3y + 6 = -2x \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 0{,}5(5 + y) = x \end{cases}$

34. Hallen el valor de a para que (4 000; 3 000) sea la solución del sistema:

$\begin{cases} y = 0{,}75x \\ y = ax + 500 \end{cases}$

Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Hemos visto que si al representar gráficamente las dos ecuaciones lineales de un sistema, las rectas que resultan *se cortan en un punto*, las coordenadas de ese punto son la *solución* del sistema.

En ese caso, decimos que el sistema es **compatible determinado**, porque **tiene solución** y ésta es **única**. Pero hay sistemas que tienen *más de una solución* y otros que *no tienen solución.*

Ejemplo 1: Resolvamos este sistema y grafiquemos las rectas correspondientes:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 = 0{,}5y \\ y + 2 - x = 0 \end{cases}$$

- Despejamos y de la primera ecuación:

  .... =>

  y = ... (I)

- Despejamos y de la segunda ecuación:

  y = ... (II)

  ¿Cómo son las expresiones (I) y (II)?:

  ....

Esto significa que **las dos ecuaciones del sistema corresponden a la misma recta y que cada punto de esa recta es solución del sistema.**

En este caso, decimos que el sistema es **compatible indeterminado**, porque **tiene infinitas soluciones.**

Ejemplo 2: Resolvamos este sistema y grafiquemos las rectas correspondientes:

$$\begin{cases} 3x = 2 - y \\ 2y + 6x = -2 \end{cases}$$

- Despejamos y de la primera ecuación:

  .... =>

  y = ... (I)

- Despejamos y de la segunda ecuación:

  .... =>

  y = ... (II)

- Las expresiones (I) y (II) son las ecuaciones de dos rectas cuyas pendientes son ....; por lo tanto, esas rectas son .... y no tienen ningún punto en común. En este caso, decimos que el sistema es **incompatible** porque **no tiene solución**.

ractiquen

35. Completen este cuadro, que sintetiza la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales:

Gráfico	Soluciones	Tipo de sistema
Las rectas se cortan en un punto (tienen .... pendiente).	Una	
Las dos ecuaciones corresponden a la misma recta.		
Las rectas tienen .... pendiente y distinta ordenada al origen.		

36. Clasifiquen los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} y - 6x = 3 \\ \frac{5}{4}y - 2x = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ 6 + y = x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x + 2 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

37. Determinen un valor de k para que los siguientes sistemas sean compatibles determinados. Después, hallen, si es posible, un valor de k para que sean compatibles indeterminados y otro para que sean incompatibles.

a) $\begin{cases} x + ky = 4 \\ kx + 3y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = k \end{cases}$

Más métodos para resolver sistemas de ecuaciones

Existen otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones, como veremos a continuación. Conocer varios procedimientos les permitirá elegir, en cada caso, el que les parezca más sencillo.

Método de sustitución

Pablito usa caracoles como monedas, para hacer trueques con su hermanito. Ayer, con 19 caracoles le compró 3 bolitas y 2 figuritas, y hoy, por 17 caracoles, el hermanito le vendió 1 figurita y 4 bolitas. ¿Cuántos caracoles hay que pagar por una figurita y cuántos por una bolita, según este sistema de trueque?

Si llamamos ***b*** al precio (en caracoles) de una bolita y ***f*** al de una figurita, podemos plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3b + 2f = 19 \longleftarrow \text{Ayer} \\ 1f + 4b = 17 \longleftarrow \text{Hoy} \end{cases}$$

El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en alguna de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

- Conviene despejar ***f*** en la 2.da ecuación: ***f*** = ... (I)
- En la otra ecuación *sustituimos* ***f*** por .... y queda: ....
- Resolvemos esa ecuación, que tiene una sola incógnita: ....

....

....

b = ...

- Sustituimos, en la expresión (I), el valor de la incógnita que hallamos y calculamos el valor de la otra incógnita:

f = ... => ***f*** = ...

- Interpretamos el resultado: En el sistema de trueque de Pablito, una bolita cuesta .... caracoles y una figurita cuesta .... caracoles.

Nota: Si para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas aplicamos un método algebraico y llegamos a una expresión *absurda* (por ejemplo: 0 . x = 8), el sistema es **incompatible** porque ningún valor de x convierte a la igualdad en una expresión verdadera. Si eso no ocurre pero llegamos a una igualdad (por ejemplo: 0 . x = 0), que es válida para todo valor de x, el sistema es **compatible indeterminado**.

Practiquen

38. Resuelvan los cuatro sistemas del ejercicio 33 aplicando el método de sustitución y comprueben que las soluciones son las mismas que obtuvieron con el método de igualación.
39. Resuelvan, por el método de sustitución, los tres sistemas del ejercicio 36.
40. En una boutique, hay 50 remeras distribuidas en dos estantes. Si se pasaran 5 remeras del estante de abajo al de arriba, la cantidad de remeras del estante de arriba sería el cuádruplo de la del estante de abajo. Indiquen cuántas remeras hay en cada estante.
41. Matías le dijo a Paula: "Pensé un número de dos cifras. Lo único que te voy a decir es que la suma de sus dígitos es 13 y que si invertís las cifras, el número que se forma es 45 unidades mayor que el número que pensé." ¿Qué número pensó Matías?

Método de reducción

Este método consiste en multiplicar cada ecuación del sistema por un número no nulo, de modo que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales. Luego, se restan las ecuaciones obtenidas para eliminar esa incógnita y poder despejar la otra.

Resolvamos por este método el sistema correspondiente las bolitas y las figuritas de la página 62: $\begin{cases} 3b + 2f = 19 \\ 1f + 4b = 17 \end{cases}$

- Ordenamos el sistema, encolumnando las incógnitas: $\begin{cases} 3b + 2f = 19 \\ 4b + 1f = 17 \end{cases}$
- Podemos observar que si no modificamos la primera ecuación y multiplicamos por 2 la segunda, logramos igualar los coeficientes de la incógnita f; entonces, hacemos así:
- Multiplicamos por **2** la segunda ecuación: ....$(4b + 1f)$ = ... 17 => ....
- Obtuvimos un sistema *equivalente* al original y, para eliminar f, restamos miembro a miembro las dos ecuaciones que lo forman:

$$\begin{array}{r} - \quad 3b + 2f = 19 \\ 8b + 2f = 34 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

- Resolvemos la ecuación que nos quedó: $-5b = -15$ => b = ...
- Sustituimos el valor de b en una de las ecuaciones originales y despejamos f:

.... => f = ...

Si bien esa forma es la más sencilla, podríamos haber resuelto este mismo sistema eliminando la incógnita b de esta manera:

- Multiplicamos cada ecuación por el coeficiente de b en la otra:

  Multiplicamos por 4 la primera ecuación: $4(3b + 2f) = 4 . 19$ =>..

  Multiplicamos por .... la segunda ecuación: .... $(4b + 1f)$ = ... 17 => ....
- Obtuvimos un sistema equivalente al original y, para eliminar b, restamos miembro a miembro las dos ecuaciones que lo forman:

$$\begin{array}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

- Resolvemos la ecuación que nos quedó: $5f = 25$ => f = ...
- Sustituimos el valor de f en una de las ecuaciones originales y despejamos b:

.... => b = ...

Observen que en ambos casos obtuvimos la misma solución que cuando utilizamos el método de *sustitución.*

Practiquen

42. Martín es estudiante de Agronomía y debe preparar una mezcla de avena y maíz para alimentar el ganado. Cada onza de avena contiene 4 g de proteínas y 18 g de carbohidratos. Una onza de maíz contiene 3 g de proteínas y 24 g de carbohidratos. Indiquen cuántas onzas de cada cereal debe incluir la mezcla para cumplir con los requisitos nutricionales de 200 g de proteínas y 1 320 g de carbohidratos por comida.
43. Resuelvan por el método de reducción los sistemas correspondientes a los ejercicios 33, 36, 40 y 41.
44. Completen, si es posible, el sistema: $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ de modo que:
    a) su solución sea: $x = 3$; $y = 4$
    b) no tenga solución;
    c) tenga infinitas soluciones;
    d) su solución sea el origen de coordenadas;
    e) su solución sea el punto $(1; -1)$.

Sistemas de inecuaciones. Programación lineal

La **programación lineal** consiste en un conjunto de técnicas que facilitan la resolución de problemas de planificación económica o social. Su objetivo es el de *optimizar*, es decir, minimizar los costos o maximizar los beneficios, utilizando las *restricciones* o condiciones impuestas por el problema.

Para satisfacer las demandas de sus distribuidores, un fabricante de jeans debe producir, por día, no menos de 300 y no más de 800 jeans azules y no menos de 100 y no más de 300 jeans negros. Además, para mantener una buena calidad, no debe producir en total más de 800 jeans por día. Sabiendo que obtiene una ganancia de $ 16 por cada jean azul y de $ 8 por cada jean negro, desea saber cuál debe ser la producción diaria de cada tipo de jean para maximizar la ganancia.

Si simbolizamos con x la producción de jeans azules y con y la de jeans negros, podemos plantear estas inecuaciones:

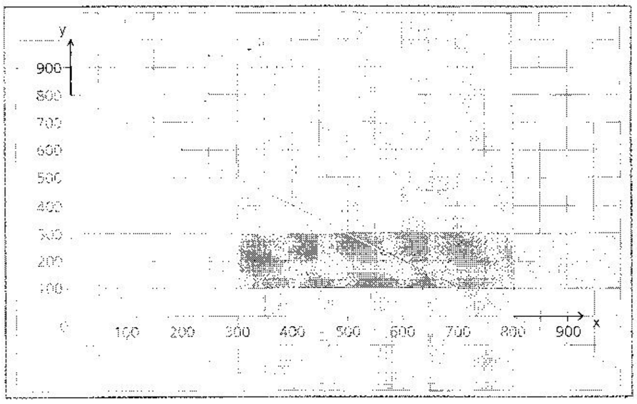
$$\begin{cases} 300 \leq x \leq \ldots\ldots & \text{(I)} \\ \ldots\ldots \leq y \leq \ldots\ldots & \text{(II)} \\ x + y \leq \ldots\ldots & \text{(III)} \end{cases}$$

Estas condiciones, que son las **restricciones** del problema, se deben cumplir simultáneamente; por lo tanto, forman un **sistema de inecuaciones.**
Encontrar la solución del sistema significa hallar el conjunto de puntos del plano que cumplen todas las restricciones. A ese conjunto de puntos lo llamamos **región factible.**

Vamos a representar el conjunto de puntos del plano que cumplen todas las restricciones:

- Marcamos con azul la región correspondiente a la expresión (I), con verde la región correspondiente a la expresión (II) y con [illegible] la región correspondiente a la expresión (III).

La **región factible** es el conjunto de los puntos del plano que quedó pintado con los tres colores. En este caso, es un cuadrilátero, y suele ser un polígono convexo.



Sabemos que la solución del problema es un punto de la región factible. Para averiguar cuál es, debemos plantear la **función objetivo**: en nuestro caso, pretendemos ***maximizar la ganancia***. Para ello, aplicamos la técnica denominada **programación lineal.**
Si llamamos G a la ganancia, estamos en presencia de una función que *depende de dos variables*: de la producción de jeans azules (x) y de la producción de jeans negros (y); entonces, de acuerdo con el enunciado del problema, **la función objetivo es: $G(x; y) = 16x + 8y$**
Maximizar esta función significa hallar, en la región factible, el punto que proporciona mayor ganancia.

Por ejemplo, un punto factible es (400; 200). Podemos calcular la ganancia asociada mediante la función objetivo, de esta forma: $G(400; 200) = 16 \cdot 400 + 8 \cdot 200 = 8\,000$

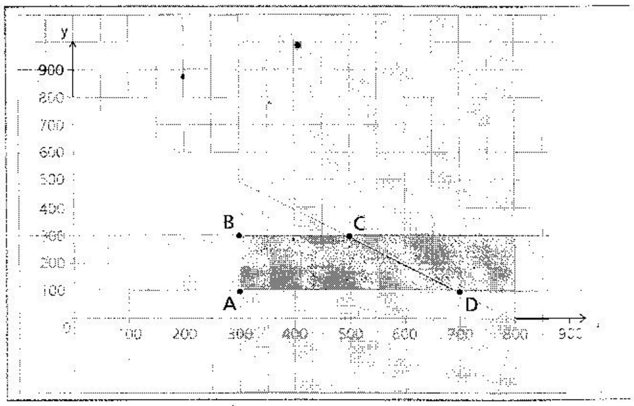
Determinen los valores de G(300; 300) = ... y de G(500; 100) = ...

De acuerdo con esos cálculos, podríamos asegurar que, de los tres puntos considerados, el que proporciona mayor ganancia es: ....; sin embargo, no estamos seguros de que sea el que maximiza la función. Entonces, recurrimos al siguiente enunciado:

Si la región factible es un polígono convexo, la solución óptima de un problema de programación lineal se encuentra siempre en alguno de sus vértices.

De acuerdo con esa propiedad, nuestro problema se reduce a hallar el valor de la función objetivo para cada uno de los vértices del polígono que constituye la región factible; luego, aquel que dé el valor máximo, es la solución buscada.

Simbolizamos con las letras A, B, C y D los vértices del polígono que contiene todos los puntos factibles.



- Determinen las coordenadas de cada vértice teniendo en cuenta que cada uno de ellos representa la intersección de las dos rectas que lo contienen:

  A = (.......; ....)

  B = (.......; ....)

  C = (.......; ....)

  D = (.......; ....)

- Calculen la ganancia asociada a cada uno de esos puntos:

  Para el punto A: G(............; ....) = ...

  Para el punto B: G(............; ....) = ...

  Para el punto C: G(............; ....) = ...

  Para el punto D: G(............; ....) = ...

De los cuatro vértices, el que otorga mayor valor a la función G es el punto .... de coordenadas: (.........; ....); entonces, podemos asegurar que si produce diariamente .... jeans azules y .... negros el fabricante obtiene la máxima ganancia.

Practiquen

45. Una compañía papelera produce dos tipos de cuadernos: los de tapa dura, que se venden a $ 1,25 cada uno, y los de tapa blanda, que se venden a $ 0,90. Los costos de producción unitarios son de $ 1 y $ 0,75, respectivamente. La compañía puede producir, por día, entre 2 000 y 3 000 cuadernos de tapa dura y entre 3 000 y 6 000 cuadernos de tapa blanda, incluidos esos cuatros valores. Además, la producción diaria no supera las 7 000 unidades. El gerente de producción necesita saber cuántos cuadernos de cada tipo conviene fabricar por día para que la empresa obtenga la máxima ganancia.

    Nota: Ganancia = ingresos – costos.

    a) Enuncien y representen gráficamente las restricciones asociadas al problema.

    b) Hallen la función objetivo y el punto que la maximiza.

46. Un granjero dispone de cien hectáreas en las que debe sembrar los cultivos A y B. La semilla del cultivo A cuesta $ 4 por ha, y la del cultivo B, $ 6 por ha. Los costos totales por mano de obra son de $ 20 y $ 10 por ha, respectivamente. El granjero espera obtener un ingreso de $ [illegible] por ha cosechada con el cultivo A y de $ 150 por ha cosechada con el cultivo B. Además, no puede invertir más de $ 480 en semillas ni más de $ 1 400 en mano de obra. ¿Cuántas hectáreas de cada cultivo le conviene sembrar para obtener la máxima ganancia?

    a) Enuncien y representen gráficamente las restricciones asociadas al problema.

    b) Hallen la función objetivo y el punto que la maximiza.

SÍNTESIS

LA FUNCIÓN LINEAL

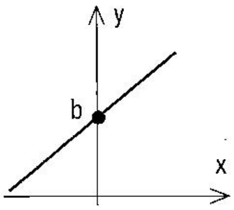
El dominio es $\mathbb{R}$ y su gráfico es una recta no paralela al eje y.
Su fórmula es de la forma: $f(x) = ax + b$

Pendiente — Ordenada al origen

Pendiente: Indica cuánto aumenta o disminuye y cuando x aumenta una unidad.

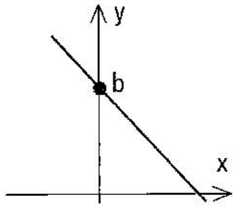
Ordenada al origen: Se encuentra en el punto en que la recta corta el eje y.

Pendiente positiva
$a > 0$



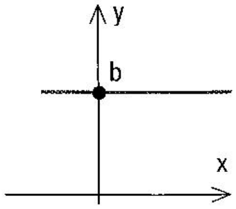
Función creciente

Pendiente negativa
$a < 0$



Función decreciente

Pendiente cero
$a = 0$



Función constante

RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES

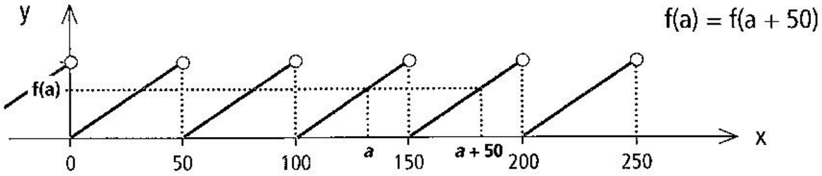
Si consideramos las rectas R: $y = a_1 x + b_1$ y S: $y = a_2 x + b_2$, se cumple que:

$R \parallel S \iff a_1 = a_2$

$R \perp S \iff a_1 . a_2 = -1$

FUNCIÓN PERIÓDICA CON TRAMOS LINEALES

Ejemplo: el período de esta función es 50. Su gráfico se repite cíclicamente.



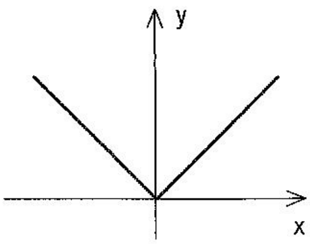
FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO O MÓDULO

Su fórmula es:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $\mathbb{R}_0^+$



SÍNTESIS

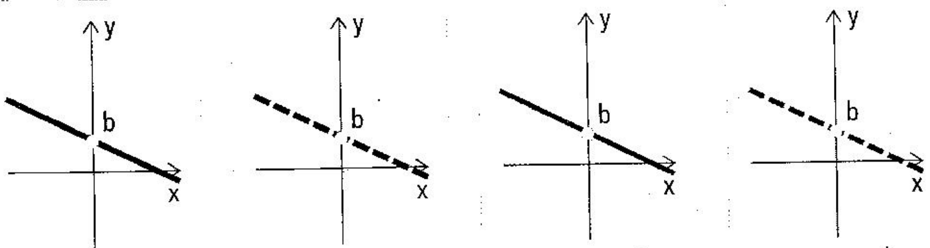
INECUACIONES

Para resolver inecuaciones, se siguen los mismos pasos que para resolver ecuaciones teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

Si $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$ Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow a \,.\, c > b \,.\, c$ Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow a \,.\, c < b \,.\, c$

INECUACIONES LINEALES EN EL PLANO

El conjunto solución es un semiplano cuya recta borde es $y = ax + b$. Para identificar cuál es, se prueba con un punto cualquiera.

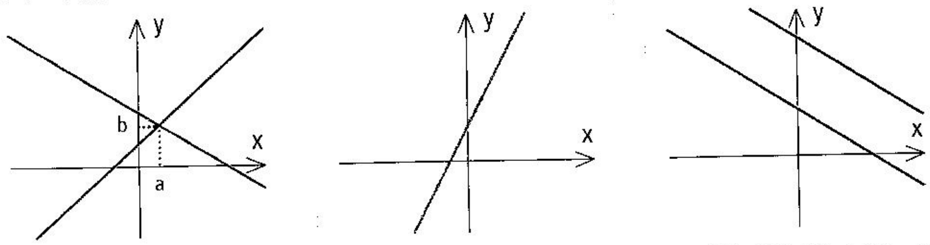


$y \geq ax + b$ $y > ax + b$ $y \leq ax + b$ $y < ax + b$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Para resolverlos, se aplica alguno de los métodos algebraicos estudiados: **igualación, sustitución** o **reducción**.
Al graficar el sistema, se puede dar uno de estos tres casos generales:

Compatible determinado Compatible indeterminado Incompatible



Única solución: (a; b) Infinitas soluciones No tiene solución

PROGRAMACIÓN LINEAL

Consiste en optimizar la función objetivo.

G(x; y)	Es la función objetivo.
Restricciones o condiciones	Son las que generan el sistema de inecuaciones que se debe resolver.
Conjunto de puntos factibles	Es el conjunto solución del sistema de inecuaciones.
Maximizar o minimizar la función objetivo	Si la región factible es un polígono convexo, hay que determinar para cuál de sus vértices la función toma el mayor o el menor valor.